

Grenztragfähigkeit und Spannungsumlagerungen eines Biegeträgers unter diversen Beanspruchungssituationen

2. STUDIENARBEIT

an der

Professur Stahlbau
Institut für konstruktiven Ingenieurbau
Fakultät Bauingenieurwesen
Bauhaus-Universität Weimar

von

cand.-Ing. Maik Brehm

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Frank Werner

Bearbeitungszeitraum: 06.01.03 bis 17.02.03

Weimar, den 17. Februar 2003

Zusammenfassung

Diese Studienarbeit soll einen Beitrag zur aktuellen Diskussion über die plastischen Grenztragfähigkeiten von Biegeträgern liefern. Mit Hilfe des FE-Programmsystems SIang werden physikalisch nichtlineare Berechnungen an einem HEB300-Träger durchgeführt. Weiterhin liefern diese Untersuchungen wichtige Erkenntnisse zu Spannungsverläufen und Spannungsumlagerungen, insbesondere der Schubspannungen. Die gewonnenen Ergebnisse werden mit analytischen Lösungen und Angaben aus der Literatur verglichen und verifiziert.

Da nicht alle Probleme gelöst und tiefgründig untersucht werden konnten, wird der Leser angehalten, eigene Ideen zu entwickeln und Nachforschungen durchzuführen.

06.01.2003

**Bauhaus-Universität Weimar
Institut für konstruktiven Ingenieurbau
Professur Stahlbau**

Aufgabenstellung für die Studienarbeit von Herrn Maik Brehm

**Grenztragfähigkeit und Spannungsumlagerungen eines
Biegeträgers unter diversen Beanspruchungssituationen**

Im Rahmen dieser Studienarbeit soll die Grenztragfähigkeit eines gabelgelagerten HEB300-Trägers unter vorgegebenen Belastungssituationen aus Normalkraft, Biegemomenten und Torsionsmoment ermittelt werden. Grundlage dessen ist die Entwicklung eines auf die Anforderungen angepassten FE-Modelles, welches mit Hilfe von analytisch berechneten Spannungs- und Verformungsgrößen verglichen und verifiziert werden soll.

Unter Zuhilfenahme nichtlinearer Verfahren der Finiten-Elemente-Methode sind weiterhin die plastischen Grenztragfähigkeiten zu bestimmen. Insbesondere sollen die Spannungsumlagerungen während des Plastizierungsvorganges herausgearbeitet und diese anschaulich dargestellt werden.

Da es in diesem Zusammenhang aktuelle Diskussionen (z.B. [Rubin, 2001]) über den Einfluss von Torsionsmomenten auf elastische und plastische Grenztragfähigkeiten zufolge Normalkraft und Biegemomenten gibt, ist dieser Sachverhalt ebenfalls herauszuarbeiten.

Kandidat:	cand.-Ing. Maik Brehm
Matrikelnummer:	980035
Seminargruppe:	B/98/A
Bearbeitungszeitraum:	06.01.03 bis 17.02.03; 6 Wochen
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Frank Werner

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Finite-Elemente-Modellierung	2
2.1	Einführung	2
2.2	Element BRICK27	2
2.3	Newton-Raphson-Iteration	5
3	Modellbildung	10
3.1	Einführung	10
3.2	Objektbeschreibung	10
3.3	Finite-Elemente-Modell	11
4	Lineare Untersuchung	14
4.1	Einführung	14
4.2	Beanspruchung zufolge Normalkraft N_x	14
4.3	Beanspruchung zufolge Torsionsmoment M_x	15
4.3.1	Einführung	15
4.3.2	Schnittkraftverlauf	15
4.3.3	Primäre Torsion	16
4.3.4	Sekundäre Torsion	16
4.4	Beanspruchung zufolge Biegemoment M_y	18
4.5	Beanspruchung zufolge Biegemoment M_z	19
4.6	Auswertung und numerische Verifikation des FE-Modelles	20
4.6.1	Einführung	20
4.6.2	Vergleich der Spannungsverläufe	22
4.6.3	Verwölbung des Querschnittes zufolge Biegemoment M_y	25
4.7	Fazit	30

5	Nichtlineare Untersuchung	31
5.1	Einführung	31
5.2	Vergleich der Grenzlastfaktoren	31
5.3	Verformungen	33
5.4	Vergleich der analytischen und numerischen Schnittgrößen	36
5.5	Spannungsumlagerungen	39
5.6	Fazit	41
6	Schlussfolgerung und Ausblick	42
A	Spannungsverläufe in Abhängigkeit der Lastfaktoren	44
A.1	Beanspruchung zufolge N_x	44
A.2	Beanspruchung zufolge M_x	45
A.3	Beanspruchung zufolge M_y	46
A.4	Beanspruchung zufolge M_z	47
A.5	Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$ -Interaktion	48
A.6	Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$ -Interaktion	50
A.7	Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$ -Interaktion	52
B	Spannungsumlagerung	54
C	CD-ROM	57
D	Selbstständigkeitserklärung	57

1 Einleitung

Die aktuellen Diskussionen (siehe Vayas, [Rubin, 2001], Kindmann u.a.) über die praktische Relevanz von plastischen Grenztragfähigkeiten, auch für einfache doppelsymmetrische Querschnitte, zeigen, dass es auf diesem Gebiet Klärungsbedarf gibt. Selbst einfache Torsionstragfähigkeiten sind zu diskutieren, wie [Wagner, 2002] zeigt. Der Einsatz von Finite-Elemente-Methoden, ein nicht wegzudenkendes Werkzeug der modernen Ingenieuranalyse, ist für diesen schwierigen und komplexen Sachverhalt nicht ohne Probleme. [Werner, 2002] konnte die prinzipiellen Vorgänge im Prozess der Querschnittsplastizierung darstellen. Diese Untersuchungen basieren auf dem Einsatz eines finiten Beam-elementes, das die Torsion integrativ berücksichtigt. Ausführungen dazu sind u.a. in [Müller, 2001] zu finden. Es konnte prinzipiell gezeigt werden, welche Schnittgrößenumlagerungen und Querschnittsänderungen während der Plastizierungsvorgänge stattfinden. Einfache Aussagen zum Einfluss der zusätzlich entstehenden Schnittgrößen waren jedoch kaum möglich.

Aus diesem Grunde sollen die bisher gewonnen Erkenntnisse mit höherwertigen Finite-Elemente-Ansätzen nachvollziehbar, anhand eines gabelgelagerten HEB300-Trägers, kontrolliert werden. Die Durchführung eigener Versuche war nicht geplant. Vielmehr sollte auf die Versuchsreihen von Dipl.-Ing. Glitsch im Rahmen des Forschungsprojektes „Torsionseffekte - Untersuchung zum Einfluss der Torsionseffekte auf die plastische Querschnittstragfähigkeit und die Bauteiltragfähigkeit von Stahlprofilen“ an der TU Berlin zurückgegriffen werden. Diese Ergebnisse lagen jedoch bis zum Ende der eigenen Bearbeitung nicht vor und konnten deshalb nicht verwendet werden.

Erkenntnisse aus konkreten numerischen Voruntersuchungen stellten die Notwendigkeit der Implementierung eines verbesserten finiten Elementes in das Finite-Elemente-Programmsystem *SIang* [Bucher, 2002] heraus. Das entwickelte Element, die verwendete nichtlineare Methode und weitere theoretische Hintergründe zur Finiten-Elemente-Methode (FEM) werden in Abschnitt 2 beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 3 der Übergang vom realen Modell zum Finiten-Elemente-Modell aufgezeigt. Die Abschnitte 4 und 5 zeigen die Ergebnisse und gewonnenen Erkenntnisse aus linearen und nichtlinearen Untersuchungen.

Durch eine ausführliche und gewissenhafte Dokumentation der gewonnenen Ergebnisse, nicht nur in den aufgeführten Diagrammen und Tabellen, sondern auch in digitaler Form, sollen weiterführende Forschungsarbeiten erleichtert werden.

2 Finite-Elemente-Modellierung

2.1 Einführung

Zur Bearbeitung der vorliegenden Aufgabenstellung, wurde das FE-Programmsystem *SIang* [Bucher, 2002] verwendet. Die Vorteile sind im frei zugänglichen Quellcode („open source“) für Forschung zu sehen und in der Möglichkeit, den Programmablauf individuell zu kontrollieren und zu steuern.

So wurde z.B. eigens für diese Bearbeitung ein neues finites Element BRICK27 entwickelt, da die bisher vorhandenen Elemente BRICK8 und BRICK20 keine augenscheinlich ausreichenden Ergebnisse, insbesondere bei komplexen Spannungsverläufen, lieferten. Das Element BRICK27 kann, auf Grund des vollständigen quadratischen Langrangeansatzes, derartige Spannungen besser darstellen.

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften des entwickelten Elementes aufgezeigt. Da zur Bearbeitung der Aufgabenstellung die nichtlineare Finite-Elemente-Methode verwendet wurde, wird anschließend das verwendete Verfahren und dessen Umsetzung erläutert.

2.2 Element BRICK27

Allgemeines: In Abbildung 1 ist das isoparametrische, geometrisch lineare Volumenelement BRICK27 mit den 27 Knoten dargestellt. Jeder Knoten besitzt 3 Translationsfreiheitsgrade und keine Rotationsfreiheitsgrade. Aufgrund der vollständigen quadratischen Langrangeansätze, wird es zur Familie der Lagrange Elemente gezählt.

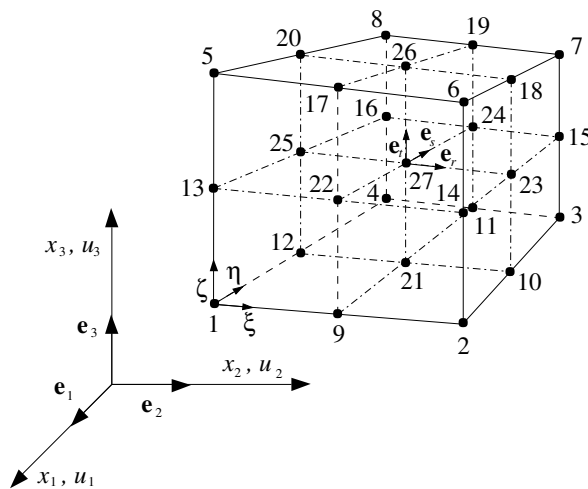


Abbildung 1: Anordnung der Knoten des Elementes BRICK27

Die drei Achsen ξ, η, ζ bilden das lokale Koordinatensystem mit dem Knoten 1 als Zentrum.

Spannungen und Dehnungen werden an 27 Interpolationspunkten ausgewertet, dessen Lage in Abbildung 2 dargestellt ist.

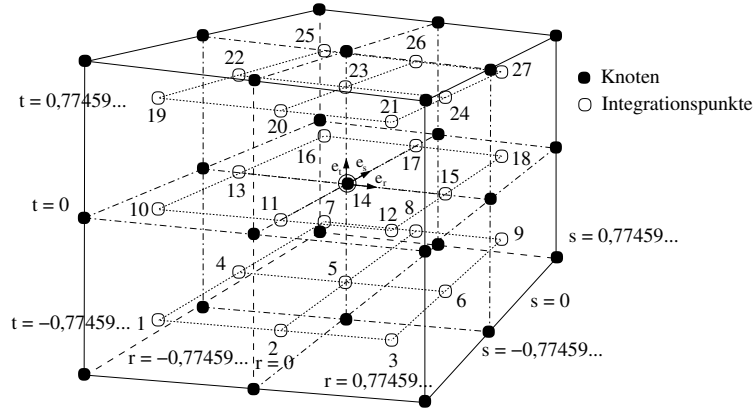


Abbildung 2: Anordnung der Interpolationspunkte des Elementes BRICK27

Materialgesetz: Für dieses Element kann ein linear elastisches oder elastisch plastisches isotropes Materialgesetz verwendet werden. Die Fließbedingung des plastischen Materialgesetzes wird über die dreidimensionale von Mises-Vergleichsspannung festgelegt. Gleichung (1) zeigt dessen Berechnung in drei verschiedenen Schreibweisen.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3 (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + 3 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \quad (1) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Komponenten werden dem Spannungstensor entnommen

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Interpolationsfunktion: Isoparametrische Elemente haben gleiche Ansatzfunktionen bezüglich Verschiebung und Geometrie. Die Verschiebungskomponenten werden nach Gleichung (3) berechnet.

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{27} h_k \mathbf{u}_i^k \quad (3)$$

Hierbei sind u_i^k die globalen Knotenverschiebungskomponenten mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3, \dots, 27$ die Elementknotennummern. Die Interpolationsfunktionen h_k sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)(-rst); & h_2 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)(rst) \\
h_3 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)(-rst); & h_4 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)(rst) \\
h_5 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)(rst); & h_6 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)(-rst) \\
h_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)(rst); & h_8 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)(-rst) \\
h_9 &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)(1-t)(st); & h_{10} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)(1-t)(-rt) \\
h_{11} &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)(1-t)(-st); & h_{12} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)(1-t)(rt) \\
h_{13} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1-r)(1-s)(rs); & h_{14} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1+r)(1-s)(-rs) \\
h_{15} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1+r)(1+s)(rs); & h_{16} &= \frac{1}{4}(1-t^2)(1-r)(1+s)(-rs) \\
h_{17} &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s)(1+t)(-st); & h_{18} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)(1+t)(rt) \\
h_{19} &= \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s)(1+t)(st); & h_{20} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)(1+t)(-rt) \\
h_{21} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2)(1-t)(-t); & h_{22} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-t^2)(1-s)(-s) \\
h_{23} &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t^2)(1+r)(r); & h_{24} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-t^2)(1+s)(s) \\
h_{25} &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t^2)(1-r)(-r); & h_{26} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2)(1+t)(t) \\
h_{27} &= (1-r^2)(1-s^2)(1-t^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

2.3 Newton-Raphson-Iteration

Neben der BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)-Methode und Last-Verschiebungs-Zwangsmethode ist die Newton-Raphson-Methode das Hauptlösungsverfahren für das Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen. Die Newton-Raphson-Methode ist nur für geometrisch lineare, physikalisch nichtlineare Finite-Elemente-Gleichungen geeignet. Es werden infinitesimale Verschiebungen und Verzerrungen am Element vorausgesetzt, wobei die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen nichtlinear sind.

Hier wird nur eine kleine Einführung in die Newton-Raphson-Methode gegeben. Weiterführend werden, stellvertretend für viele andere, [Bathe, 1996], [Kreyszig, 1983] und [Bićanić, 1978] empfohlen.

Die Newton-Raphson-Iteration geht prinzipiell von einer Unabhängigkeit der Lasten von den Verschiebungen aus, wobei die Gleichung

$$\mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{r}_{t+\Delta t} = 0 \quad (5)$$

zu jeder Zeit $t + \Delta t$ zu erfüllen ist. Der Lastvektor $\mathbf{f}_{t+\Delta t}$ beinhaltet die extern aufgebracht Kräfte, wobei $\mathbf{r}_{t+\Delta t}$ den Rückstellkraftvektor darstellt, der über die Gleichung

$$\mathbf{r}_{t+\Delta t} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} dV, \quad \mathbf{B} - \text{Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix} \quad (6)$$

direkt mit den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ gekoppelt ist. Zur Berechnung des Last- und Rückstellkraftvektors wird das Prinzip der virtuellen Arbeit verwendet. Somit muss die Lösung des Gleichungssystems der Bedingung nach Gleichung (5) genügen, welche zugleich als Abbruchkriterium herangezogen wird.

Im Folgenden werden drei Variationen der Newton-Raphson-Iteration vorgestellt. Jeder Variante liegt der gleiche Ansatz zugrunde. Die Unterschiede liegen in der Anzahl der Iterationsschritte und dem rechnerischen Aufwand zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrix bzw. dessen Inversen.

Full Newton-Raphson-Iteration: Die volle Newton-Raphson-Iteration berechnet die globale Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt neu. Dies bedeutet immer einen sehr hohen Rechenaufwand, der zumindest teilweise durch die geringe Anzahl an Iterationsschritten kompensiert wird. Das Flussdiagramm nach Abbildung 3 veranschaulicht die Iteration.

Es ist zu beachten, dass die verwendeten Gleichungen nur eine Linearisierung der vollständigen Taylorreihenentwicklung sind und demzufolge nur Näherungen darstellen. Somit können die Lösungen signifikant falsch sein, und je nach Größe der verwendeten Zeit- oder Lastschritte, auch instabil sein. Deshalb ist es notwendig, solange zu iterieren, bis die Gleichung (5) hinreichend genau erfüllt ist.

Nach der Lipschitz-Kontinuität ist die Konvergenz dieser Iteration im Allgemeinen quadratisch, d.h. jedoch auch, dass der Fehler je Iterationsschritt quadratisch ansteigt. Wenn

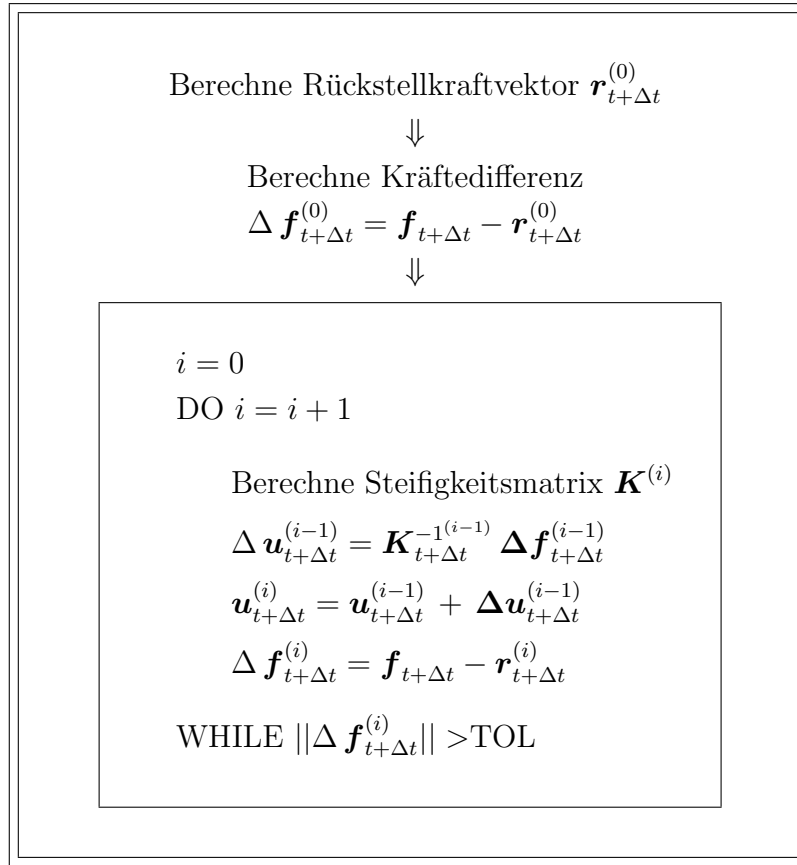


Abbildung 3: Full Newton-Raphson-Iteration

der Fehler nach einer Iteration i von der Ordnung ϵ ist, so ist der Fehler nach der Iteration $i + 1$ bereits ϵ^2 . Man kann diesen Fehler aber meist durch die Wahl kleiner Zeit- und Lastinkremente begrenzen.

Modified Newton-Raphson-Iteration: Da der Rechenaufwand zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix extrem hoch sein kann, wird sie in diesem Verfahren nur zu Beginn der Iteration berechnet und dann für die gesamte Iteration verwendet. Somit erhöht sich im Allgemeinen die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte. Die Abbildung 4 zeigt übersichtlich das Berechnungsschema.

Initial Newton-Raphson-Iteration: Diese Methode ist auch unter „Initial Stress Method“ bekannt. Es wird die Antwort um die Ausgangskonfiguration linearisiert. Der Vorteil liegt in der einmaligen Aufstellung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{-1^0}$ zu Beginn der Berechnung, welche für alle Iterationen verwendet wird. Jedoch kann dieses Verfahren sehr langsam konvergieren oder sogar divergieren und somit zu keiner Lösung führen. Das Flussdiagramm in Abbildung 5 zeigt den Algorithmus.

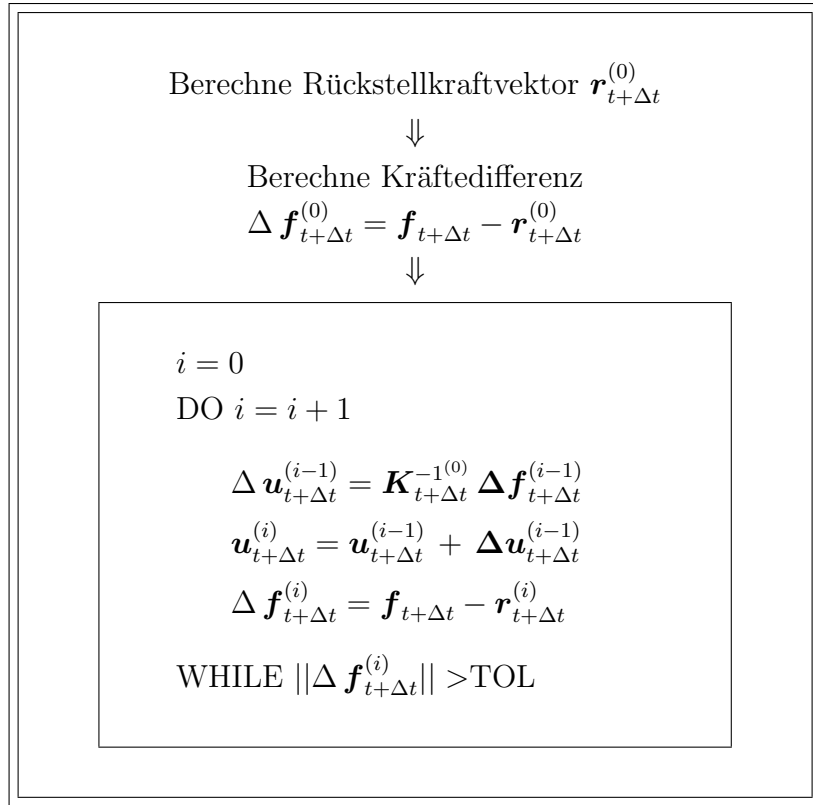


Abbildung 4: Modified Newton-Raphson-Iteration

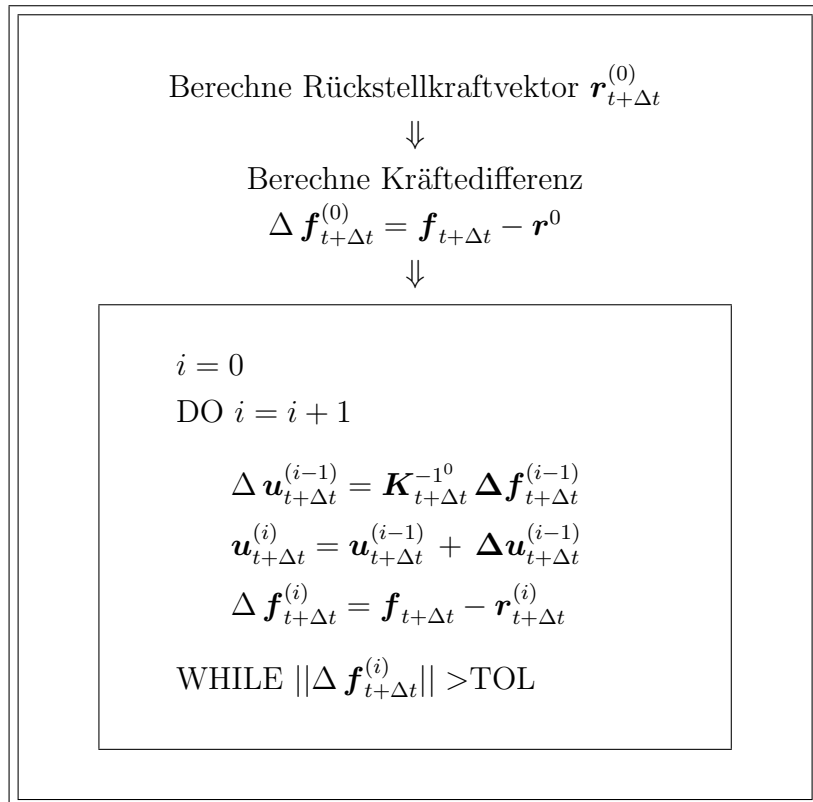
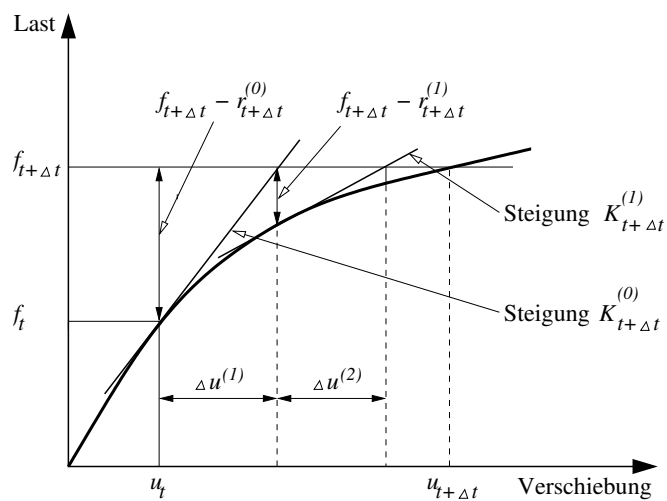
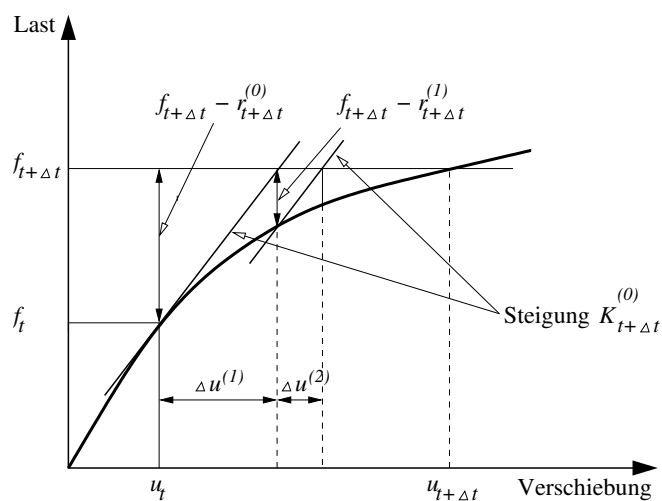


Abbildung 5: Initial Newton-Raphson-Iteration

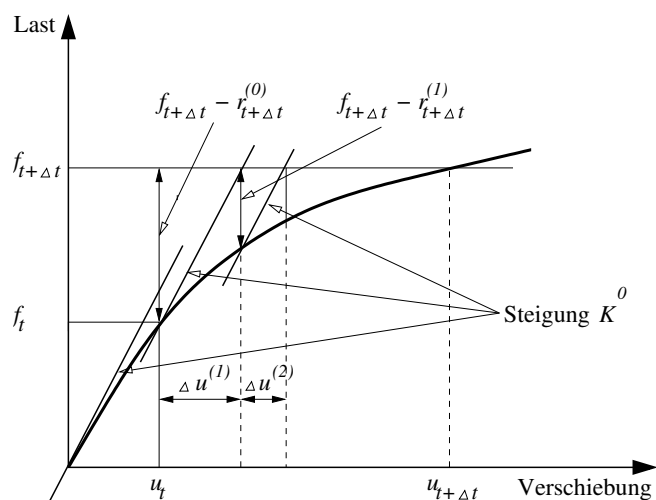
Abbildung 6 veranschaulicht die Lösungsalgorithmen der Newton-Raphson-Methode anhand eines SDOF(single degree of freedom)-Systemes.



a) Full Newton-Raphson-Iteration



b) Modified Newton-Raphson-Iteration



c) Initial Newton-Raphson-Iteration

Abbildung 6: Überblick der Methoden der Newton-Raphson-Iteration nach [Bathe, 1996]

In ingenieurwissenschaftlichen Berechnungen stößt man auf ein breites Spektrum an Systemeigenschaften und Nichtlinearitäten. Es zeigt sich, dass die Effektivität der zuvor gezeigten Verfahren von der jeweils betrachteten Problemstellung abhängt. Das leistungsfähigste Verfahren, um Konvergenz zu erreichen, ist das full Newton-Raphson-Verfahren. Möglicherweise lässt sich jedoch die Effizienz erheblich durch die modified oder initial Newton-Raphson-Methode verbessern.

Alle vorgestellten Lösungsmöglichkeiten haben Vor- und Nachteile. Interessant sind deshalb selbstanpassende Techniken, die die jeweils günstigste Variante auswählen.

Zur Bearbeitung der vorliegenden Aufgabenstellung ist eine Kombination aus full Newton-Raphson und modified Newton-Raphson verwendet worden, um einen hohen Effizienzgrad zu erreichen.

Für die Mehrzahl der Iterationsschritte wurde die modified Newton-Raphson-Methode verwendet und ergänzend nach jedem 100., 150., 200., ... Iterationsschritt die Steifigkeitsmatrix neu berechnet, um in diesen Schritten die Konvergenz zu verbessern. Diese Vorgehensweise fand bereits in den Voruntersuchungen Anwendung und hat sich bewährt. Weiterhin wurde ein Abbruchkriterium eingebaut, welches die Anzahl der Iterationsschritte auf 600 begrenzt, da hierbei meist keine Möglichkeit mehr besteht das Kriterium nach Gleichung (5) zu erfüllen.

Da die Iteration in einigen Berechnungen der Voruntersuchung zu keinem Ergebnis und somit zum Abbruch der Iteration führte, wird eine weitere Modifikation der eigentlichen Methode ab dem 30. Iterationsschritt in der Gleichung

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (7)$$

vorgenommen und wie folgt abgeändert

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + 0.7 \Delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)}. \quad (8)$$

Diese Modifikation bewirkt eine verschlechterte Konvergenzrate zugunsten einer vollständig ausiterierten, qualitativ hochwertigen Lösung.

3 Modellbildung

3.1 Einführung

Nachdem die numerischen Hintergründe erläutert wurden, sollen diese am konkreten Untersuchungsobjekt, einem HEB300-Träger, angewendet werden. Zunächst wird jedoch der Träger mit seinen Geometrie- und Materialwerten beschrieben, um dann im zweiten Teil auf die Besonderheiten der Modellierung einzugehen.

3.2 Objektbeschreibung

Um die Untersuchungen zu Grenztragfähigkeiten und Spannungsumlagerungen durchführen zu können, wurde exemplarisch ein HEB300-Träger ausgewählt, der sich nach Erfahrungen vorhergehender Untersuchungen als besonders kritisch herausstellte. Auch [Wagner, 2002] kam, bei Berechnungen von elastischen Grenztorsionsmomenten, zu dieser Erkenntnis. Die verwendeten Geometrie- und Materialparameter sind in Tabelle 1 dargestellt. Im Weiteren wird von einem leicht idealisierten Querschnitt ohne entsprechende Eckausrundungen an den Gurträndern und Übergängen von Steg zu Gurt ausgegangen.

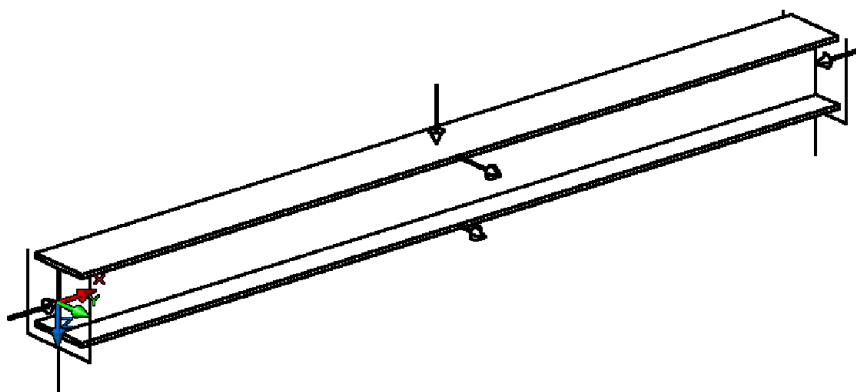


Abbildung 7: Belastungs- und Lagerungskonfiguration

Die unterschiedlichen Beanspruchungen werden aus verschiedenen Kombinationen einer Normalkraft N_x , eines Torsionsmomentes M_x , sowie beider Biegemomente M_y und M_z zusammengestellt. Diese Schnittgrößen werden durch entsprechend aufgetragene Kräfte erzeugt. Die eingeleiteten Kräfte und die resultierenden Schnittgrößen sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Das Torsionsmoment M_T wird dabei durch zwei horizontal in die Gurte eingeleitete Lasten erzeugt. In weiteren Betrachtungen sollen diese Lasten und Schnittgrößen dem Lastfaktor (LF) 1.00 entsprechen, wobei die Einteilung der Beanspruchungen nicht nach den eingeleiteten Kräften, sondern nach den Schnittgrößen erfolgen soll.

Geometrieparameter		
Länge des Trägers	l	$= 4.000\ m$
Höhe des Trägers	h	$= 0.300\ m$
Breite des Trägers	b	$= 0.300\ m$
Gurtdicke	t	$= 0.019\ m$
Stegdicke	s	$= 0.011\ m$
Fläche	A^*	$= 149 \cdot 10^{-4}\ m^2$
Flächenträgheitsmoment	I_y^*	$= 25170 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Flächenträgheitsmoment	I_z^*	$= 8560 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Torsionsflächenmoment	I_T^*	$= 185 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Wölbflächenmoment	I_ω^*	$= 16878 \cdot 10^{-10}\ m^6$
Fläche (idealisiert)	A	$= 143 \cdot 10^{-4}\ m^2$
Flächenträgheitsmoment (idealisiert)	I_y	$= 24187 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Flächenträgheitsmoment (idealisiert)	I_z	$= 8553 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Torsionsflächenmoment (idealisiert)	I_T	$= 149 \cdot 10^{-8}\ m^4$
Wölbflächenmoment (idealisiert)	I_ω	$= 16878 \cdot 10^{-10}\ m^6$
* nach [Schneider, 1998] für HEB300		
Materialparameter		
Elastizitätsmodul	E	$= 2.1 \cdot 10^{11}\ N/m^2$
Schubmodul	G	$= 8.0769 \cdot 10^{10}\ N/m^2$
Poisson-Zahl	ν	$= 0.3$
Dichte	ϱ	$= 7850\ kg/m^3$
Fließspannung	f_y	$= 2.4 \cdot 10^8\ N/m^2$

Tabelle 1: Geometrie- und Materialparameter des HEB 300-Trägers

Lasten	Beträge der max. Schnittgrößen	
$P_x = 650600\ N$	$N_x = 650600\ N$	$\hat{=} 0.2\ N_{xpl,d}$
$M_T = 1966\ Nm$	$M_x = 983\ Nm$	
$P_z = 163200\ N$	$M_y = 163200\ Nm$	$\hat{=} 0.4\ M_{ypl,d}$
$P_y = 57000\ N$	$M_z = 57000\ Nm$	$\hat{=} 0.3\ M_{zpl,d}$

Tabelle 2: Lasten und Schnittgrößen entsprechend dem Lastfaktor 1.00

3.3 Finite-Elemente-Modell

Im Zuge der Voruntersuchung stellten sich Elementwahl, Diskretisierung, Lagerung und Krafteinleitung als besonders kritische Eckpunkte der Modellbildung heraus und sollen nun ausführlich erläutert werden.

Finite-Elemente-Auswahl: Um die zuvor beschriebene Struktur in ein FE-Modell zu überführen, wurde das 27knotige Volumenelement BRICK27 verwendet, welches im Abschnitt 2 bereits näher erläutert wurde.

Da Idealisierungen, wie dies u.a. in Schalenelementen üblich ist, auf Elementebene verhindert werden sollen, wurden Volumenelemente verwendet. Somit ist eine unvoreingenommene Grundlagenforschung möglich. Zur Auswahl standen noch weitere Volumenelemente, wie z.B. das 8knotige BRICK8 oder das 20knotige BRICK20. Das BRICK8 kam nicht in die engere Auswahl, da dieses, auf Grund der linearen Ansatzfunktionen, zu ungenauen und falschen Lösungen führen würde. Somit wurden Voruntersuchungen mit den BRICK20-Elementen durchgeführt, welche aber, infolge der unvollständigen quadratischen Ansatzfunktionen, manche Spannungszustände unzureichend darstellen konnten.

Diskretisierung: Der Querschnitt des Trägers wird, wie in Abbildung 8 gezeigt, durch insgesamt 32 Elemente diskretisiert. Hierbei sind jeweils 11 Elemente für den Gurt und 10 Elemente für den Steg vorgesehen. Über die Gurtstärke bzw. Stegstärke ist jeweils nur ein Element angeordnet. Die Längsachse des Trägers wird durch 40 derartiger Querschnitte beschrieben. Somit ergeben sich Elementabmessungsverhältnisse von etwa 1:1.5:5 für den Gurt und 1:2.5:9 für den Steg.

Das Modell besitzt insgesamt 640 Elemente mit 7995 Knoten und etwa 23200 Freiheitsgraden. Eine höhere Diskretisierung wurde aus Gründen der Handhabbarkeit und Rechenzeit vorerst nicht in Betracht gezogen.

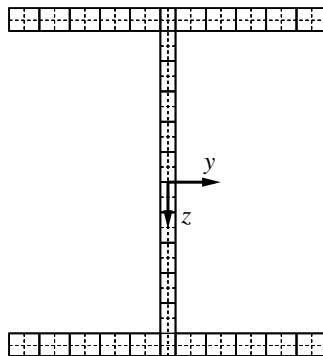


Abbildung 8: Diskretisierung im Quer- und Längsschnitt

Lagerungsbedingungen: Im Allgemeinen sind Lagerungsbedingungen in FE-Modellen möglichst real und zwangungsfrei zu gestalten. Wird dies nicht hinreichend genug berücksichtigt, können Lösungen für ein nicht erwünschtes statisches System oder unerwünschte Nebenspannungen entstehen.

Da es sich hier um einen Querschnitt aus mehreren Volumenelementen handelt, müssen die Lagerungsbedingungen nicht nur für einen Knoten, wie beispielsweise bei Balkenelementen, definiert werden, sondern für die Knoten des gesamten Querschnittes. Weiterhin sei hier nochmals bemerkt, dass Volumenelemente nur Translationsfreiheitsgrade besitzen und keine Rotationsfreiheitsgrade.

Um die Gabellagerung an den Stellen $x=0$ und $x=l$ zu definieren, werden alle Translationsfreiheitsgrade der Knoten der beiden Querschnitte in y - und z -Richtung festgehalten, die der x -Richtung bleiben frei. Das Gleichgewicht in x -Richtung wird durch entgegengesetzt gerichtete Kräftepaare P_x in den Randquerschnitten erreicht. Um das System numerisch stabil zu definieren, wird der Knoten in der Mitte des Querschnittes ($x=0$) zusätzlich in x -Richtung festgehalten. Wird dies nicht berücksichtigt, kann die FE-Berechnung falsche Ergebnisse liefern. Die benannten Querschnitte der Lagerung sind in Abbildung 9 farbig markiert.

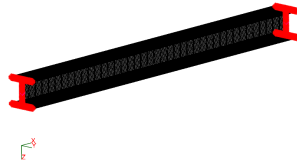


Abbildung 9: Gabellagerung im FE-Modell

Der Vorteil dieser Lagerungsvariante liegt in der unabhängigen Bewegungsmöglichkeit der Gurte. Bei alleiniger Torsionsbeanspruchung beispielsweise, verdrehen sich die Gurte gegeneinander. Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte wird demnach nicht erzwungen. Ein Nachteil liegt in der nicht vollständig zwangungsfreien Lagerung. Es treten Schubspannungen infolge Querdehnungen auf. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass diese Einflüsse vernachlässigbar klein und nur in unmittelbarer Nähe der Lagerung vorhanden sind.

Krafteinleitung: Die eingeleiteten Kräfte sind P_x , P_y und P_z . Daraus werden die Schnittkräfte N_x , M_x , M_y und M_z erzeugt. Die Krafteinleitung erfolgt über mehrere Knoten in Trägermitte ($x=l/2$) für P_z und P_y , und an den Trägerenden ($x=0$ und $x=l$) für P_x . Die konkrete Verteilung der Kräfte auf die Knoten ist in Abbildung 10 dargestellt. Jeder zugeordnete Knoten erhält die gleichen Anteile der eingeleiteten Kraft ohne Berücksichtigung der Ansatzfunktionen oder Einzugsflächen.

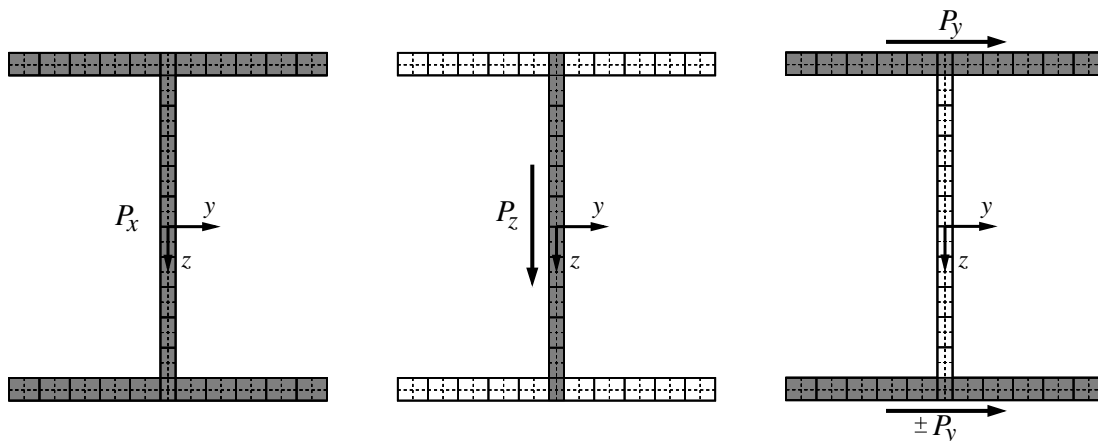


Abbildung 10: Verteilung der Lasten im Querschnitt

4 Lineare Untersuchung

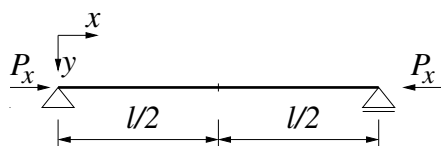
4.1 Einführung

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen für die spätere nichtlineare Untersuchung geschaffen werden. Jede der vier Beanspruchungsarten wird einzeln linear untersucht und mit Hilfe von analytischen Lösungen verifiziert. Dies ist notwendig, um Fehlerquellen in den nichtlinearen Untersuchungen ausschließen zu können. Die verschiedenen Spannungen werden erläutert und mit den Spannungen aus dem FE-Modell verglichen. Analog wird mit den Verformungen verfahren.

Ein Beispiel für eine Kombination aus zwei Beanspruchungsarten wird angeführt, um die Komplexität der Spannungsverläufe bei Einwirkung verschiedener Beanspruchungsarten zu verdeutlichen.

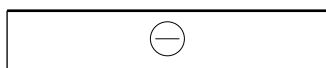
4.2 Beanspruchung zufolge Normalkraft N_x

Die Normalkraftbeanspruchung stellt die einfachste vorliegende Beanspruchungsart dar, welche in Abbildung 11 dargestellt ist. Es treten außer der Normalkraft keine weiteren Schnittgrößen auf.



Beanspruchung

$$P_x \text{ bei } x = 0 \text{ und } x = l$$



Normalkraft:

$$N_x = -P_x$$

Abbildung 11: Verlauf der Schnittgrößen infolge Normalkrafteinwirkung

Demnach sind nur Normalspannungen und keine Schubspannungen vorhanden. Die Normalspannungen sind über Querschnitt und Träger konstant und berechnen sich nach

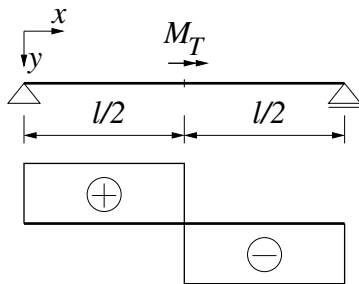
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}. \quad (9)$$

4.3 Beanspruchung zufolge Torsionsmoment M_x

4.3.1 Einführung

Im Gegensatz zur Normalkraftbeanspruchung, ist die Darstellung der Torsionsmomentenbeanspruchung etwas aufwendiger. Das einwirkende Torsionsmoment M_T erzeugt je nach Lagerung und Querschnitt zwei Torsionsschnittgrößen. Zum einen das primäre Torsionsmoment, zum anderen das sekundäre Torsionsmoment. Zunächst wird die Schnittgrößenverteilung für den hier vorliegenden Fall der Einzeltorsionsmomenteneinwirkung gezeigt und anschließend die beiden zugehörigen Torsionsarten näher erläutert. Weiterführend seien hier u.a. [Petersen, 1993] und [Mang, 2000] angeführt.

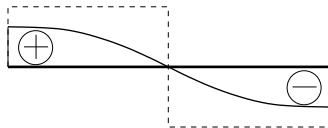
4.3.2 Schnittkraftverlauf



Beanspruchung:

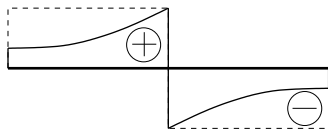
$$M_x = M_T/2 = M_{x,1} + M_{x,2}; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_\omega}} = 0.5827 \text{ m}^{-1}$$



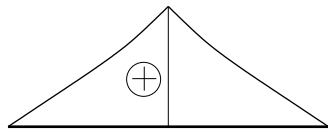
Primäres Torsionsmoment:

$$M_{x,1}(x) = M_T \left[\frac{1}{2} - \frac{\sinh(\lambda l/2)}{\sinh(\lambda l)} \cosh(\lambda x) \right]$$



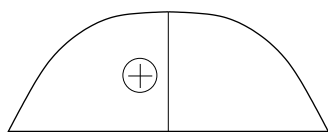
Sekundäres Torsionsmoment:

$$M_{x,2}(x) = M_T \frac{\sinh(\lambda l/2)}{\sinh(\lambda l)} \cosh(\lambda x)$$



Wölbbimoment:

$$M_\omega(x) = \frac{M_T}{\lambda} \frac{\sinh(\lambda l/2)}{\sinh(\lambda l)} \sinh(\lambda x)$$



Verdrehung:

$$\phi_x = \frac{M_T}{E I_\omega \lambda^3} \left[\frac{\lambda x}{2} - \frac{\sinh(\lambda l/2)}{\sinh(\lambda l)} \sinh(\lambda x) \right]$$

Abbildung 12: Verlauf der Schnittgrößen und Verdrehung infolge Torsionseinwirkung nach [Schneider, 1998]

Abbildung 12 zeigt den Verlauf der Schnittkräfte nach [Schneider, 1998] infolge einer Einzelmomenteneinwirkung in der Mitte des gabelgelagerten Trägers. Der Verlauf der entsprechenden Spannungen ist nach den Gleichungen (10) und (11) direkt ableitbar.

4.3.3 Primäre Torsion

Diese Torsionsart ist ebenfalls unter der Bezeichnung reine Torsion oder Saint-Venant'sche Torsion bekannt. Es wird die Theorie des geschlossenen Schubflusses angewandt. Die Schubspannungen sind über die Dicke des Querschnittes linear verteilt, was in Abbildung 13 veranschaulicht wird. Entlang der Profilmittellinie ist die Schubspannung Null.

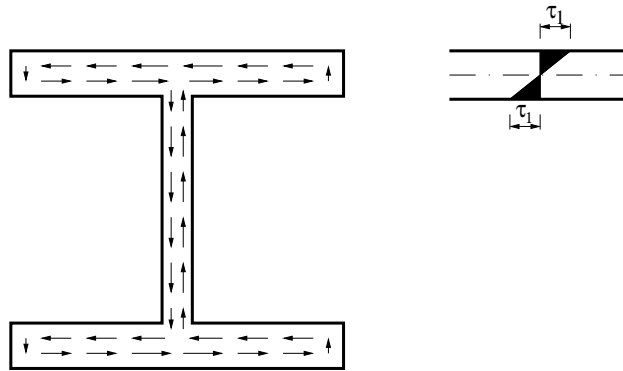


Abbildung 13: Verlauf der primären Torsionsschubspannungen im I-Querschnitt

Mit Hilfe der Gleichungen in Abbildung 12 können die maximalen primären Torsionsschubspannungen im jeweiligen Querschnitt berechnet werden.

$$\max \tau_1(x) = \frac{M_{x,1}(x)}{I_T} t \quad (10)$$

Im Allgemeinen sind die Effekte aus primärer Torsion bei offenen Querschnitten, wie I-Profilen, sehr gering und werden deshalb bei praktischen Rechnungen meist vernachlässigt.

Weitere Ausführungen und Berechnungsbeispiele sind unter anderem in [Petersen, 1993] zu finden.

4.3.4 Sekundäre Torsion

Eine weitere Bezeichnung für diese Torsionsart ist Wölbkrafttorsion, da das Verwölben des Querschnittes und dessen Behinderung eine Grundvoraussetzung für das Auftreten darstellt.

Die sekundäre Torsion tritt verstärkt auf bei:

- Stabeinspannungen oder anderen extremen Wölbbehinderungen
- Stark veränderlichen Querschnitten oder Torsionsmomenten
- Offenen dünnwandigen Querschnitten

Bei Vollquerschnitten und dünnwandigen Hohlquerschnitten ist der Effekt aus sekundärer Torsion sehr gering, weil die Verwölbung infolge großer Drillsteifigkeit sehr klein ist. Die alleinige Berücksichtigung der primären Torsion stellt in diesem Fall eine gute Näherung dar.

Bei offenen dünnwandigen Querschnitten, wie es ein I-Profil darstellt, ist die Verwölbung erheblich größer und somit auch die zugehörigen Spannungen. Es entstehen infolge dieser Querschnittsverwölbung zusätzliche Normalspannungen - die Wölbspannungen. Aus Gleichgewichtsgründen müssen zusätzliche Schubspannungen (Sekundärschubspannungen) vorhanden sein. Beide Spannungsarten sind nur in den Gurten zu finden und sind, im Gegensatz zur primären Torsionsschubspannung, über dessen Dicke konstant. Der Verlauf der Spannungen aus sekundärer Torsion ist in Abbildung 14 übersichtlich dargestellt.

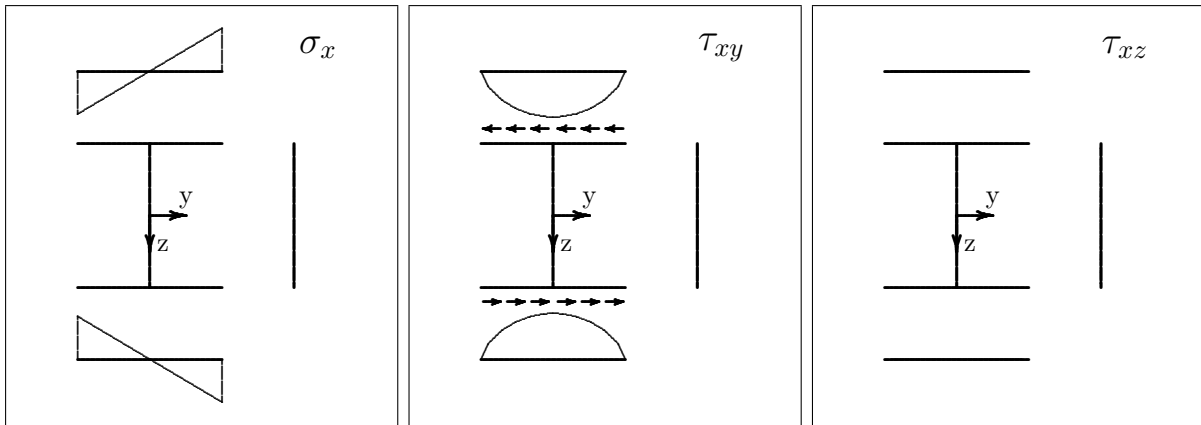


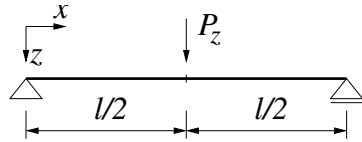
Abbildung 14: Theoretische Spannungen aus sekundärer Torsionsmomentenbeanspruchung

Gleichung (11) zeigt die Berechnungen der maximalen sekundären Torsionsschub- und Wölbspannungen im Querschnitt. Die zugehörigen Momente sind aus den Gleichungen in Abbildung 12 zu entnehmen.

$$\begin{aligned} \max \tau_2(x) &= \frac{3}{2} \frac{M_{x,2}(x)}{(h-t)bt} \\ \max \sigma_2(x) &= -\frac{6 M_\omega(x)}{(h-t)b^2 t} \end{aligned} \tag{11}$$

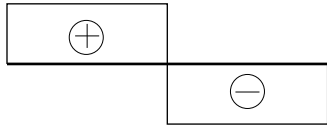
4.4 Beanspruchung zufolge Biegemoment M_y

Diese Beanspruchung wird durch eine Einzelkrafteinwirkung in Trägermitte erzeugt. Die entstehenden Schnittgrößen und Verformungen nach Balkentheorie sind in Abbildung 15 dargestellt.



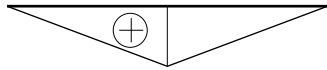
Beanspruchung:

$$P_z \text{ bei } x = \frac{l}{2}$$



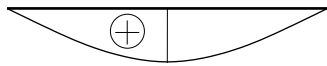
Querkraft:

$$V_z(x) = \frac{P_z}{2} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$



Moment:

$$M_y(x) = \frac{P_z x}{2} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$



Durchbiegung:

$$u_z(x) = (0.75 x l^2 - x^3) \frac{P_z}{12 E I_y} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

Abbildung 15: Verlauf der Schnittgrößen und Durchbiegung infolge Einzelkrafteinwirkung

Aus den Schnittgrößen folgend ergeben sich Normalspannungen σ_x und Schubspannungen τ_{xz} , deren prinzipiellen Verläufe in Abbildung 16 für $x \geq \frac{l}{2}$ dargestellt sind. Die Schubspannungen τ_{xy} entstehen infolge des Schubflusses.

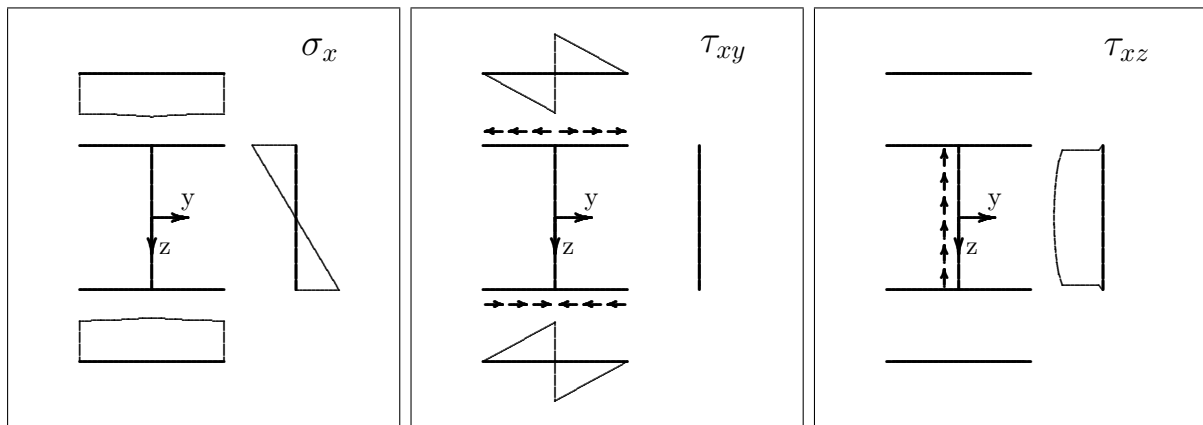


Abbildung 16: Theoretische Spannungen aus Biegemoment M_y

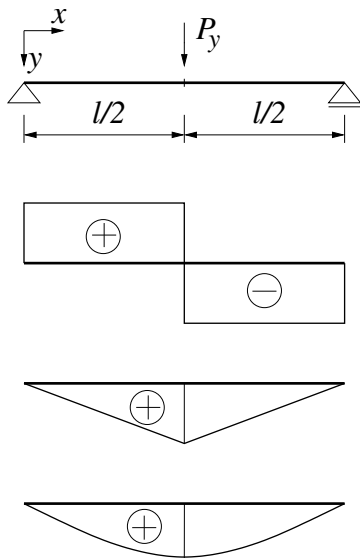
Die maximalen Spannungen im jeweiligen Querschnitt sind

$$\begin{aligned} \max \sigma_x &= \pm \frac{M_y}{I_y} \frac{h}{2} \\ \max \tau_{xy} &= \frac{V_z}{I_y} \frac{S_y}{t} \quad \text{bzw.} \quad \max \tau_{xz} = \frac{V_z}{I_y} \frac{S_y}{s}. \end{aligned} \tag{12}$$

Eine Besonderheit stellen die Normalspannungen dar. In praktischen Berechnungen wird oft angenommen, dass die Normalspannungen in einer Gurtfaser konstant sind. Infolge der Schubspannungen entstehen jedoch Schubgleitungen, die wiederum Verwölbungen verursachen. Die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte ist somit nicht mehr gültig. Aufgrund der Verwölbung erleiden die Gurte einen Abfall der Spannungen in Richtung der Gurtkanten. Dieser Abfall kann je nach Breite des Gurtes beträchtlich sein. Bei genormten I-Profilen wird dieser Einfluss jedoch meist vernachlässigt.

4.5 Beanspruchung zufolge Biegemoment M_z

Diese Beanspruchung wird analog zur Beanspruchung zufolge M_y durch Einzelkrafteinwirkung erzeugt. Die entstehenden Schnittgrößen und Verformungen sind in Abbildung 17 dargestellt.



Beanspruchung:

$$P_y \text{ bei } x = \frac{l}{2}$$

Querkraft:

$$V_y(x) = \frac{P_y}{2} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

Moment:

$$M_z(x) = \frac{P_y x}{2} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

Durchbiegung:

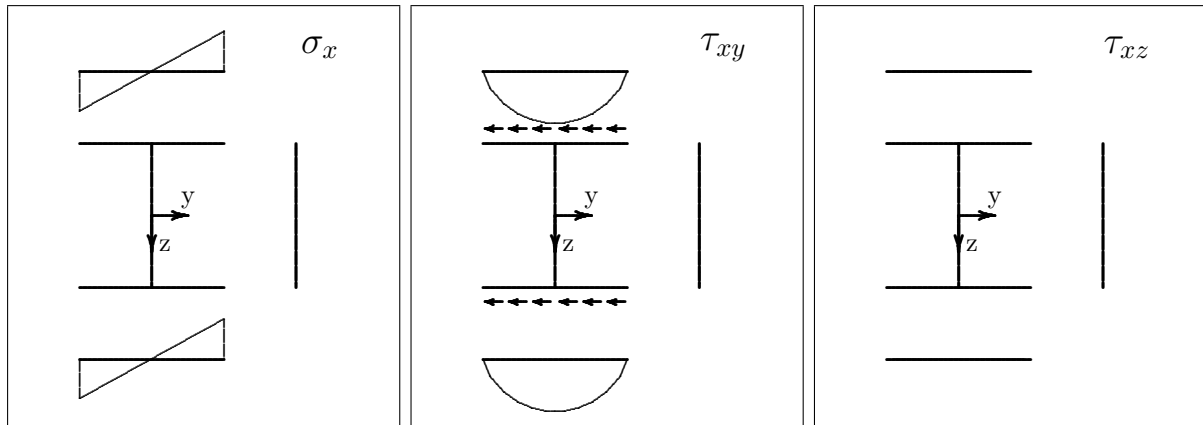
$$u_y(x) = (0.75 x l^2 - x^3) \frac{P_y}{12 E I_z} \text{ für } x \leq \frac{l}{2}$$

Abbildung 17: Verlauf der Schnittgrößen und Durchbiegung infolge Einzelkrafteinwirkung

Es entstehen infolge der Schnittgrößen nur die Normalspannungen σ_x und Schubspannungen τ_{xy} . Abbildung 18 zeigt dessen Verläufe in einem Querschnitt für $x \geq \frac{l}{2}$.

Die Gleichungen (13) geben die maximalen Spannungen im Querschnitt an.

$$\begin{aligned} \max \sigma_x &= \pm \frac{M_z}{I_z} \frac{b}{2} \\ \max \tau_{xy} &= \frac{V_y}{I_z} \frac{S_z}{t} \end{aligned} \tag{13}$$

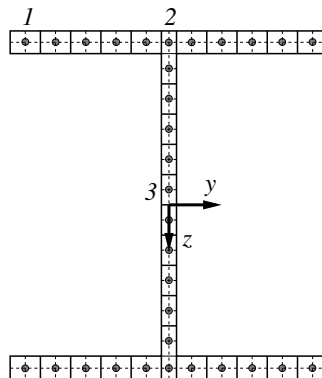
Abbildung 18: Theoretische Spannungen aus Biegemoment M_z

4.6 Auswertung und numerische Verifikation des FE-Modelles

4.6.1 Einführung

Nachdem die Spannungen nach einfachen Theorien der Festigkeitslehre erläutert wurden, sollen diese mit den Ergebnissen der FE-Berechnung verglichen werden. Die Auswertung der Spannungen erfolgt in den in Abbildung 19 dargestellten Punkten. Da kein Element exakt in der Mitte des Trägers vorhanden ist, werden die Spannungen im Querschnitt $x=2.10$ des Trägers genutzt. Diese stellen den Spannungsmittelwert im Elemente dar. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des `SLANG`-Befehls

```
stress extract, element_center, stress_case elem_number, output_stress/ .
```

Abbildung 19: Lage der ausgewerteten Spannungen im Querschnitt($x=2.10$)

Zunächst sollen konkrete Ergebnisse der Berechnungen nach Theorie und FEM gegenübergestellt werden. Tabelle 3 zeigt den Vergleich der Spannungen und Verformungen. Die Berechnungsvorschriften für die theoretischen Ergebnisse wurden bereits zuvor erläutert. Alle Spannungen sind auf den Querschnitt $x=2.10$ bezogen. Durch hochgestellte Zahlen-Indices sind die konkreten Stellen nach Abbildung 19 festgelegt. Die Verformungsgrößen beziehen sich auf die Mitte des Querschnittes $x=2.00=1/2$. Bei Ausnahmen dieser Konven-

tion werden die entsprechenden Werte mit Hilfe von Fußnoten markiert. Als prozentuale Abweichung wird das Verhältnis $100 \cdot (A^{numerisch} - A^{analytisch}) / A^{analytisch}$ definiert. Auffallend ist die durchgehend sehr gute Übereinstimmung der Normalspannungen. Auch die Schubspannungen τ_1 aus primärer Torsion stimmen, unter Beachtung von nur einem Element für die Gurt- und Stegdicke, ausgezeichnet überein. Anders verhält es sich bei den Schubspannungen, die zufolge einer Biegebeanspruchung entstehen. Hier ergeben sich größere Abweichungen, welche aber im akzeptablen Bereich von etwa 10% liegen. Die vollständigen Spannungsverläufe werden im Abschnitt 4.6.2 diskutiert.

		Spannungen [N/mm^2]; Verformungen [mm] oder $[-]$		Abwei- chung [%]
		analytisch	numerisch	
N_x	σ_x^1	-45.4965	-45.5620	0.1%
	τ_{xy}^2	0.0	0.0	0.0%
	τ_{xz}^3	0.0	0.0	0.0%
M_x	τ_1^a	2.4262	2.4182	0.3%
	τ_1^b	0.1041	0.1100	5.7%
	σ_ω^1	-14.5791	-14.8769	2.0%
	τ_2^2	-0.8780	-0.7994	-9.0%
	ϕ_x	$4.7978 \cdot 10^{-3}$	$4.9539 \cdot 10^{-3}$	3.3%
M_y	σ_x^1	-90.1918	-87.3864	-3.1%
	σ_x^2	-90.1918	-94.2138	4.5%
	τ_{xz}^3	-27.4280	-25.2670	-7.9%
	u_z	4.2841 (4.9653 ^c)	4.9683	16.0% (0.1% ^c)
	ϕ_z^d	$3.2131 \cdot 10^{-3}$	$3.2609 \cdot 10^{-3}$	1.5%
M_z	σ_x^1	-85.8182	-86.3192	-0.6%
	τ_{xy}^2	-3.7487	-3.0037 (-3.4000 ^e)	-19.9% (9.3% ^e)
	τ_{xz}^3	0.0	0.0	0.0%
	u_y	4.2313 (4.2932 ^c)	4.2937	1.5% (0.0% ^c)

^aSteg (globale Stelle im Träger: $x=0.022$; $y=0.0085$; $z=0.0$)

^bGurt (globale Stelle im Träger: $x=2.022$; $y=0.0$; $z=0.148$)

^cmit Verwölbung nach Gleichungen 20 und 24

^dQuerschnitt bei $x=0$

^egeglätteter Verlauf

Tabelle 3: Verifikation der linearen Untersuchung

Bei den Verformungen ist die Abweichung der Durchbiegung zufolge M_y von 16% herauszuheben, wobei die Abweichung der Durchbiegung zufolge M_z nur 2% beträgt. Hier wird der Einfluss der Schubverzerrung auf die Durchbiegung der schubweichen biegestarken Achse sehr deutlich. In Klammern ist jeweils die analytische Durchbiegung mit Berücksichtigung der Schubkraft und somit der Verwölbung dargestellt. Diese Werte stimmen

nahezu exakt überein. Der Sachverhalt des Einflusses der Schubverzerrung und Verwölbung wird in Abschnitt 4.6.3 näher erläutert.

Schlussfolgernd zeigt dies zum einen ein sehr gutes Verhalten des Volumenelementes BRICK27, zum anderen wird hier deutlich, dass einfache Berechnungen nach Bernoulli-Theorie durchaus extreme Abweichungen zu höherwertigen Berechnungsmethoden haben können.

4.6.2 Vergleich der Spannungsverläufe

In Abbildung 20 sind die numerischen Ergebnisse zufolge N_x dargestellt. Diese entsprechen im Verlauf den theoretischen Annahmen. Es treten nur Normalspannungen und keine Schubspannungen auf.

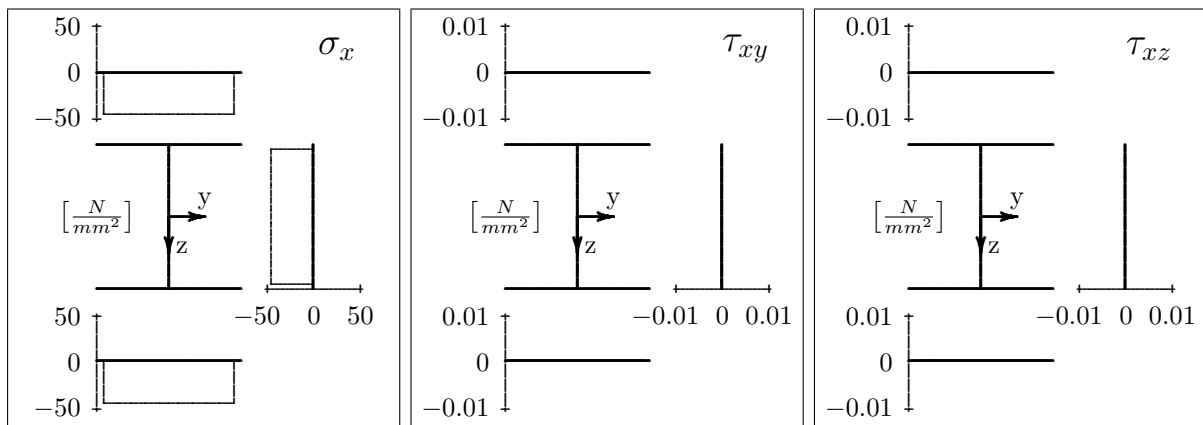
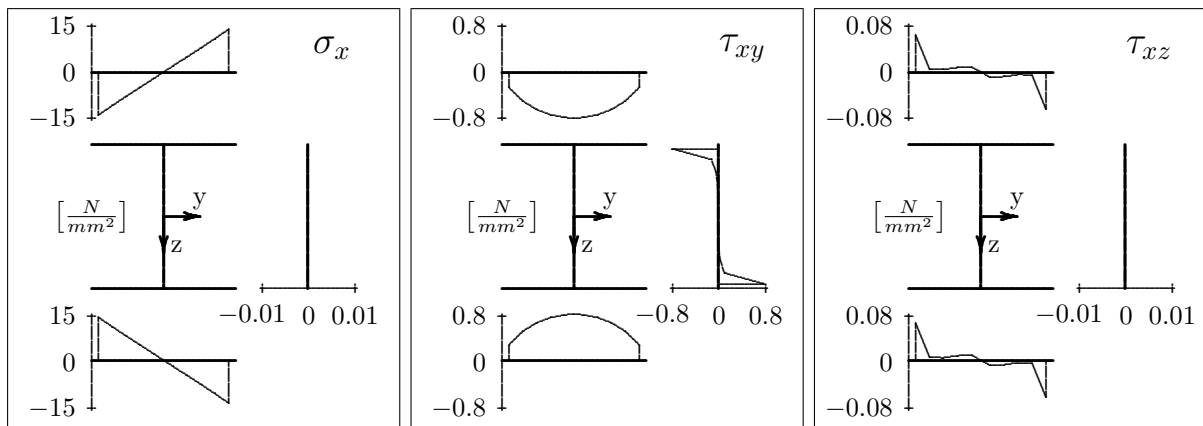
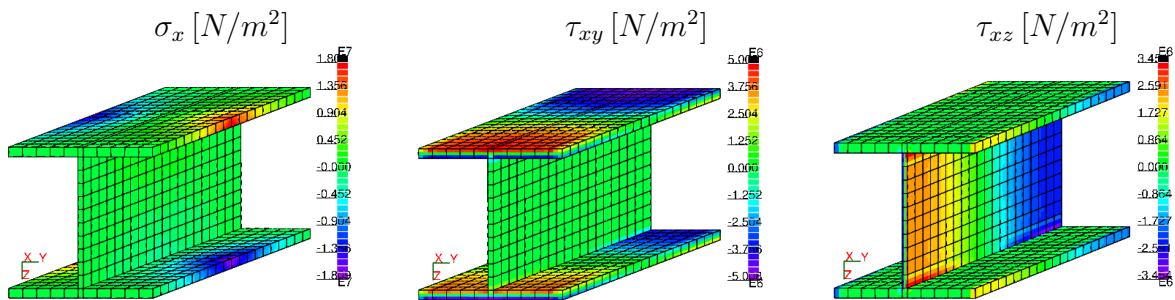


Abbildung 20: Beanspruchung zufolge N_x ; LF1.0

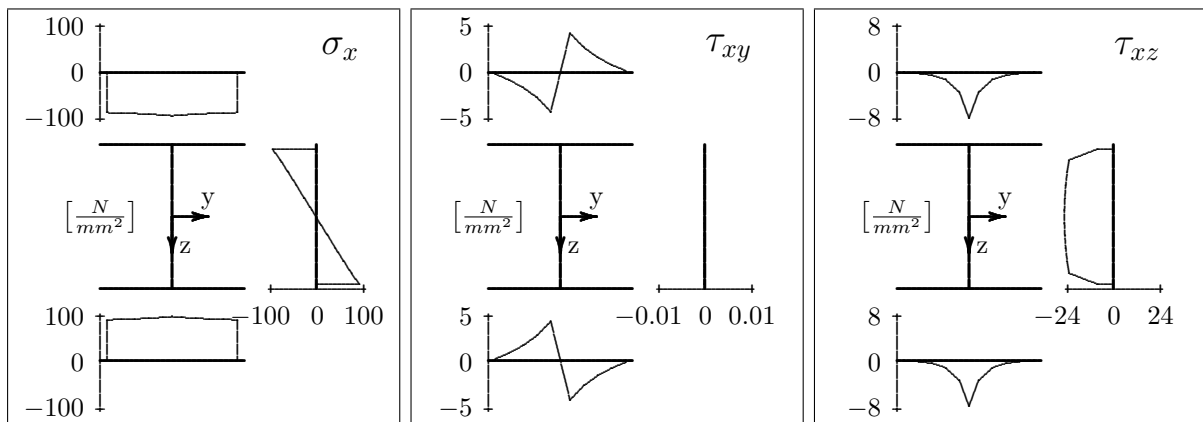
Auch bei dem Torsionsmoment M_x werden die theoretischen Spannungsverläufe bestätigt. Abbildung 21 stellt die gemittelten Spannungen im beschriebenen Querschnitt, nach Abbildung 19, dar. Da sich infolge dieser Mittelung über die Gurt- bzw. Stegdicke die Anteile aus primärer Torsion aufheben, ist in Abbildung 22 nochmals detailliert der Verlauf der Spannungen über den gesamten Träger dargestellt. Hierbei entspricht ein schwarz umrandeter Quader einem Element.

Da hier die Schubspannungen in τ_{xy} und τ_{xz} unterteilt sind, spiegelt sich der eigentlich geschlossene Schubfluss in beiden Anteilen wieder. So ist z.B. eine große Schubspannung τ_{xz} am Rand der Gurte zu finden, welche die Vertikalkomponente des Schubflusses im Gurt darstellt. Zu beachten ist, dass die Darstellungen immer beide Torsionsarten enthalten. So ist die Spannung in der Mittellinie der Gurte nicht exakt Null, da noch Anteile aus sekundärer Torsion vorhanden sind. Es ist gut der Abfall der primären Torsionsschubspannungen zur Mitte hin zu erkennen. Auch der Abfall der Normalspannungen (Wölbspannungen) ist offensichtlich und stimmt mit den theoretischen Annahmen überein.

Die Ergebnisse der FE-Berechnung zufolge M_y ist in Abbildung 23 dargestellt. Prinzipiell stimmen auch hier die Spannungsverläufe mit den theoretischen Annahmen überein. So

Abbildung 21: Beanspruchung zufolge M_x ; LF1.0Abbildung 22: Verteilung der Spannungen im Träger zufolge M_x ; LF1.0

konnte zum Beispiel ein Normalspannungsabfall von etwa 8% im Gurt zu den Gurten hin herausgearbeitet werden. Dieser doch erhebliche Unterschied ist schon bei einer Gurtbreite von 300mm vorhanden. Bei breiteren Profilen wird dieser Unterschied noch größer und kann entscheidende Auswirkungen auf die Tragfähigkeit haben. Die theoretischen Normalspannungen nach Balkentheorie entsprechen etwa dem Mittelwert aus den Spannungen am Gurtrand und Gurtmitte. Somit stellen diese eine gute Approximation für globale Tragfähigkeitsberechnungen dar.

Abbildung 23: Beanspruchung zufolge M_y ; LF1.0

Interessant sind auch die Schubspannungen τ_{xz} im Gurt, welche in theoretischen Betrachtungen nicht vorhanden sind. Diese stellen den Übergang der Schubspannung vom Steg

in den Gurt dar, der nicht unstetig verlaufen kann, sondern wie sich hier erkennen lässt, kontinuierlich verlaufen muss und zum Gurtrand hin stark abfallend ist.

Die Spannungsverläufe aus FE- und theoretischen Betrachtungen stimmen auch bei der Beanspruchung zufolge M_z annähernd überein. Kleinere Unterschiede sind in den Schubspannungen vorhanden. So ist ein Übergang der Schubspannung τ_{xy} vom Gurt in den Steg zu finden. Dies ist analog den Schubspannung τ_{xz} zufolge M_y zu erklären. Die Schubspannungen τ_{xz} könnten eine Singularität infolge einspringender Ecken beim Übergang vom Steg zum Gurt darstellen. Aufgrund der geringen Größe (1% der Schubspannungen τ_{xy}) hat diese Spannung jedoch keine Bedeutung für die allgemeinen Betrachtungen.

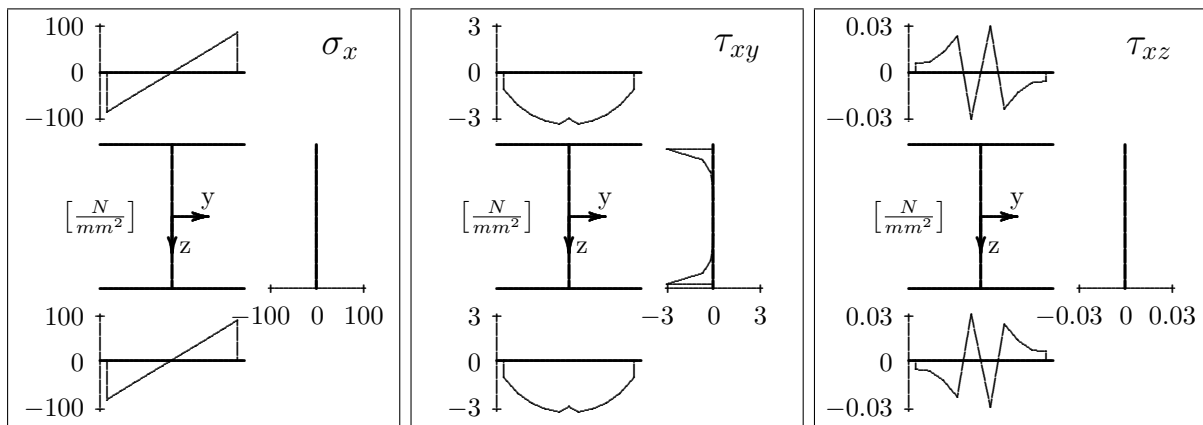


Abbildung 24: Beanspruchung zufolge M_z ; LF1.0

Zur besseren Anschaulichkeit der Beanspruchung zufolge $M_y - M_z$ sind die Ergebnisse der FE-Berechnungen in Abbildung 25 dargestellt. Zur Kontrolle können die Abbildungen 23 und 24 superponiert werden. Es zeigt sich, dass aus der Kombination einfacher Beanspruchungen, durchaus komplizierte Spannungsverläufe entstehen können.

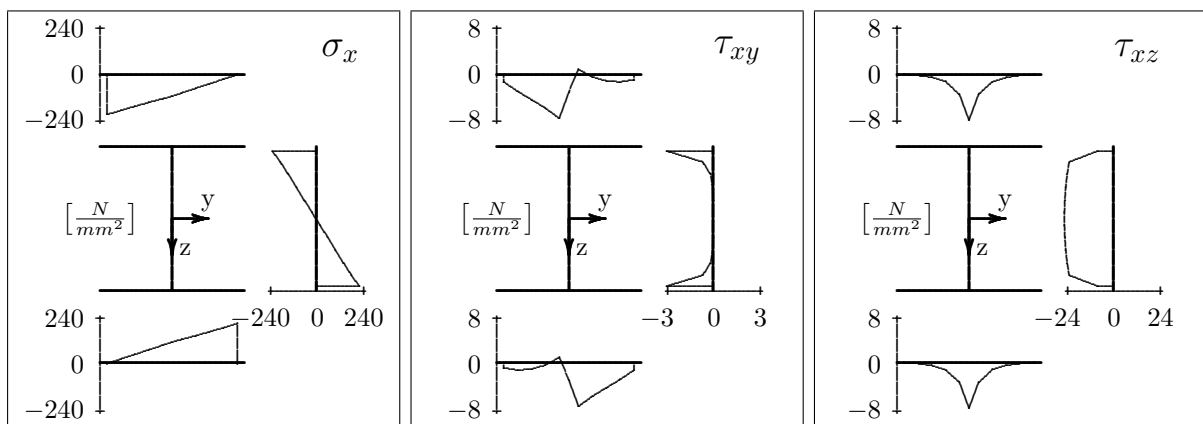


Abbildung 25: Beanspruchung zufolge $M_y - M_z$; LF1.0

4.6.3 Verwölbung des Querschnittes zufolge Biegemoment M_y

In diesem Abschnitt soll die Verwölbung des Querschnittes zufolge einer Beanspruchung M_y nachgewiesen werden. Der Einfluss dessen auf die Durchbiegung ist ebenfalls rechnerisch nachzuprüfen.

Da die Querschnittsverformungen erwartungsgemäß an den Auflagern am größten sind, wird der Querschnitt $x=0$ näher untersucht. Abbildung 26 zeigt die Verformung des Querschnittes qualitativ, während in Abbildung 27a die Verschiebung in x-Richtung der einzelnen Querschnittsfasern dargestellt ist. In dieser globalen Betrachtung, sind keine Besonderheiten zu erkennen. Deshalb soll nun der Gurt und der Steg detailliert untersucht werden.

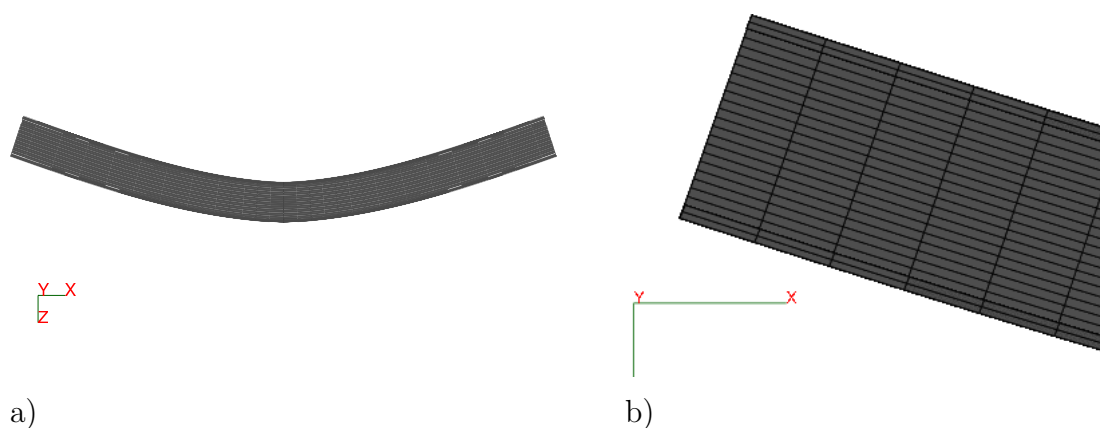


Abbildung 26: Verformung des Trägers zufolge M_y (100fache Überhöhung);
a) Gesamtansicht; b) Detail am linken Lager

Im Gurt stehen aufgrund der Diskretisierung drei Knoten über dessen Dicke zur Verfügung. Die Verschiebungen der drei Untergurtfasern entsprechen den drei unteren Balken in Abbildung 27a, wobei in Abbildung 27b deren Draufsicht dargestellt ist. Bei dieser

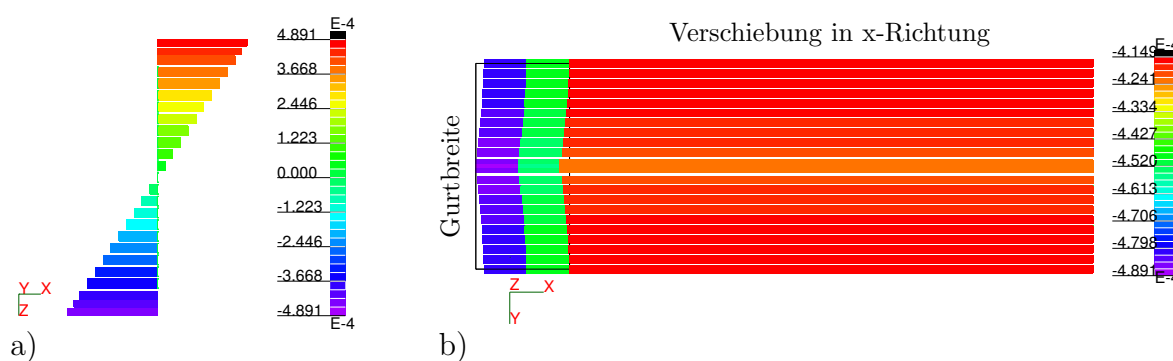


Abbildung 27: 2D-Darstellung der Verformung des Randquerschnittes
a) Verschiebung der Querschnittsfasern in x-Richtung [m]
b) Verschiebung der drei Untergurtfasern in x-Richtung [m]

starken Überhöhung des Untergurtes, ist eine deutliche Verwölbung aller drei Schichten zum Gurtrand hin zu erkennen. In der Mitte des Gurtes, in der Nähe des Steganschlusses, ist die größte Verwölbung des Querschnittes zu verzeichnen. Der Unterschied ist jedoch auch in dieser Gurtfaser nur 1.9%.

Eine 3-dimensionale Ansicht der Querschnittsverwölbung des Untergurtes ist in Abbildung 28 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der Einfluss des Steganschlusses in der Mitte des rot gefärbten Bereiches.

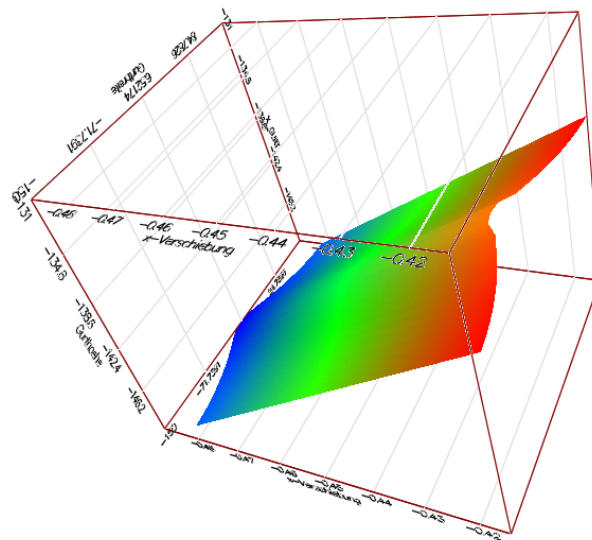


Abbildung 28: 3D-Darstellung der Verwölbung des Untergurtes im Randquerschnitt $x=0$

Wird der Steg in seiner Längsachse betrachtet, so finden sich ebenfalls Abweichungen vom ebenen Querschnitt. In Abbildung 29a sind die numerischen und analytischen Verschiebungen nach Balkentheorie in x-Richtung aufgetragen. Es ist hier jedoch fast kein Unterschied zu erkennen. Nur im Bereich der markierten Gurtbereiche weichen die Kurven voneinander ab. Berechnet man jedoch die Differenz der beiden Kurven, dargestellt in Abbildung 29b, so zeichnet sich eine deutliche Abweichung vom ebenen Querschnitt ab. Der Unterschied beträgt jedoch nur wenige μm . In Bereichen des Steges ist die Übereinstimmung der Verformungen sehr gut. Die Abweichungen im Bereich der Gurte sind jedoch um ein Vielfaches größer. Hier werden Unterschiede von bis zu 1.5% im Vergleich zur analytischen Lösung erreicht.

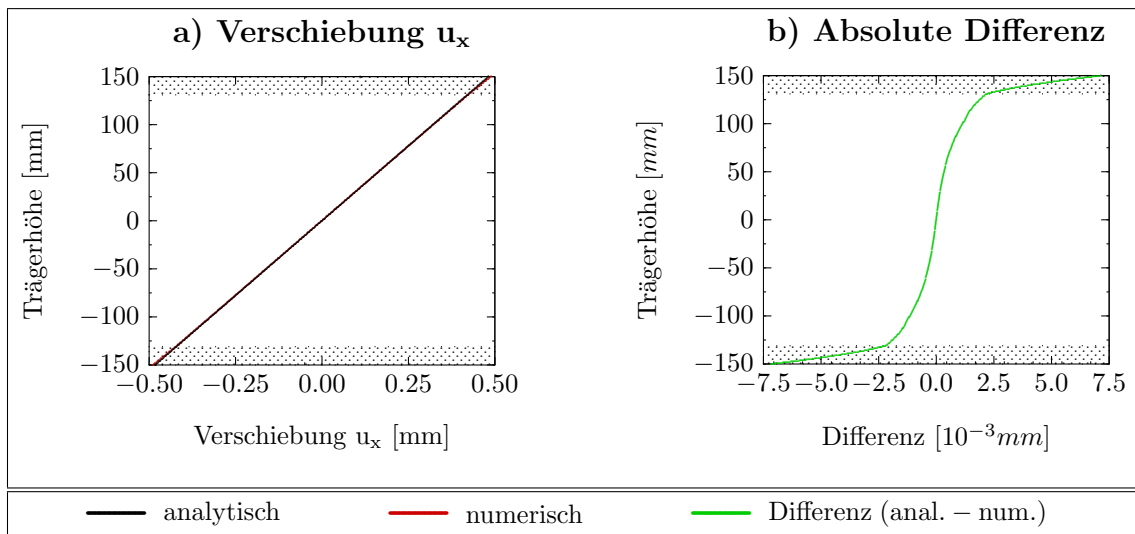


Abbildung 29: Vergleich der analytisch und numerisch berechneten Verschiebungen in der Mitte des Querschnittes

Der Nachweis der Verwölbung des Querschnittes konnte numerisch nachgewiesen werden. Interessant ist die praktische Relevanz der Schubverzerrung auf die Durchbiegung. In der Regel sind größere Abweichungen zur Balkentheorie nur bei gedrunenen Trägern zu erwarten. Hier ist das Verhältnis $h/l \approx 1/13$, also ein offensichtlich nicht gedrunener Träger. Dennoch soll der Einfluss der Querkraft auf die Durchbiegung rechnerisch überprüft werden. Es wird nun eine Möglichkeit zur Berücksichtigung der Schubverformungen auf die Durchbiegung nach [Schlechte, 1981], [Petersen, 1993] oder [Mang, 2000] hergeleitet.

Infolge der nichtlinearen Verteilung der Schubspannungen über die Querschnittsfläche entstehen nichtlineare Gleitungen der Querschnittsfasern. Dies führt zu einer unebenen Querschnittsverformung, der Verwölbung. Vereinfachend wird eine gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen angenommen. Die eigentliche Verwölbung wird dann mit Hilfe eines Korrekturfaktors κ erfasst.

Die konstanten Schubspannungen τ_0 ergeben sich, zum Beispiel für einen Rechteckquerschnitt, aus der Querkraft V_z und der Querschnittsfläche A zu

$$\tau_0 = \frac{V_z}{A}. \quad (14)$$

Unter Zuhilfenahme des Gleitmodules G werden die zugehörigen Gleitungen γ_0 nach Gleichung (15) berechnet.

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G} \quad (15)$$

Damit ergibt sich für die relativen Verschiebungen zweier Querschnitte im Abstand dx

$$du_{z0} = \gamma_0 dx. \quad (16)$$

Mit Hilfe der eingeführten Schubverteilungszahl κ kann die Verwölbung berücksichtigt werden.

$$du_z = \kappa du_{z0} = \kappa \frac{V_z}{G A} dx \quad (17)$$

Nun wird diese Verschiebung, und letztlich dann auch die Schubverteilungszahl κ , über die Arbeit der inneren und äußeren Kräfte bestimmt. Diese Herleitung ist unter anderem in [Schlechte, 1981] zu finden. Für die dimensionslose Schubverteilungszahl κ ergibt sich dann

$$\kappa = \frac{A}{V_z^2} \int_A \tau^2 dA. \quad (18)$$

Es ist zu erkennen, dass dieser Korrekturwert nur von der Querschnittsform abhängig ist. So ergibt sich zum Beispiel für Rechteckquerschnitte immer der Wert $\kappa = 1.2$. Wird bei I-Querschnitten von einer Vernachlässigung der Gurte zur Schubspannungsaufnahme ausgegangen, so ergibt sich der Schubkorrekturfaktor κ aus dem Verhältnis der Gesamtfläche des Querschnittes A und der Stegfläche A_{Steg} .

$$\kappa = \frac{A}{A_{Steg}} \quad (19)$$

Eine weitere Formel für die Berechnung des κ -Wertes für I-Querschnitte ohne Berücksichtigung der Eckausrundungen ist in [Petersen, 1993] zu finden.

$$\kappa = \frac{(12 + 72m + 150m^2 + 90m^3) + \nu (11 + 66m + 135m^2 + 90m^3) + 30n^2 (m + m^2) + 5\nu n^2 (8m + 9m^2)}{10(1 + \nu)(1 + 3m)^2} \quad (20)$$

$$\text{mit } m = 2 \frac{bt}{hs} \quad \text{und} \quad n = \frac{b}{h}$$

Durch die Summation der gegenseitigen Verschiebungen der Schnittufer des Längenelementes dx erhält man die Gesamtverformung des Trägers. Dazu wird Gleichung (17) umgeformt

$$\frac{du_z}{dx} = \kappa \frac{V_z}{G A} \quad (21)$$

und anschließend integriert

$$u_z(x) = \int \kappa \frac{V_z}{G A} dx + C. \quad (22)$$

Bei konstantem Schubmodul G und nichtveränderlicher Querschnittsfläche A folgt aus Gleichung (22)

$$\begin{aligned} u_z(x) &= \frac{\kappa}{G A} \int \frac{dM_y}{dx} dx + C \\ &= \frac{\kappa}{G A} M_y(x) + C. \end{aligned} \quad (23)$$

Mit Hilfe der Gleichung (24) kann nun die Durchbiegung infolge Querkraft berechnet werden. Die Gesamtdurchbiegung ergibt sich dann aus der Summe der Durchbiegung

infolge Biegung und Querkraft. Für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger mit mittig einwirkender Einzellast ergibt sich die Durchbiegung für $x \leq \frac{l}{2}$ zu

$$u_z(x) = -\frac{M_y(x)}{EI} \left(\frac{1}{3l}x^3 - \frac{l}{4}x \right) + \frac{M_y(x) \kappa}{GA}. \quad (24)$$

Nun können die Durchbiegungen ohne und mit Berücksichtigung der Verwölbung am konkreten, hier vorliegenden Träger, verglichen werden. Der κ -Wert zufolge der Beanspruchung M_y ergibt sich nach Gleichung (19) mit der Stegfläche $A_{Steg} = s(h - t)$ zu $\kappa_1 = 4.6263$ und nach Gleichung (20) ist $\kappa_1 = 4.8212$.

Die Durchbiegungen für die Beanspruchung zufolge M_z ergeben sich analog. Da hier nur die Gurte zur Aufnahme der Schubanteile herangezogen werden, ergibt sich analog nach Gleichung (19) der κ -Wert aus dem Verhältnis der Gesamtfläche zur gesamten Gurtfläche.

Tabelle 4 zeigt die Unterschiede sehr deutlich. Als prozentuale Abweichung wird das Verhältnis $100 \cdot (A^{inf. M+V} - A^{inf. M}) / A^{inf. M}$ definiert. Die biegestarke Achse des Trägers ist wesentlich schubweicher als die biegeschwache Achse. Es zeigt sich, dass die Verformungen infolge Schubverzerrung hier nicht mehr vernachlässigbar sind.

Belastung	κ [-]	u inf. M	u_z inf. V	u inf. M+V	Abweichung
M_y	4.6263	4.2841	0.6537	4.9378	15.3%
M_y	4.8212	4.2841	0.6812	4.9653	15.9%
M_z	1.2544	4.2313	0.0619	4.2932	1.5%

Tabelle 4: Vergleich der Durchbiegungen infolge Biegemoment und Querkraft

Diese Untersuchungen zeigen sehr deutlich das Nichteckenbleiben des Querschnittes. Die Verwölbungen sind zwar sehr klein, verursachen jedoch enorme Abweichungen in der Gesamtverformung des Trägers, die nicht vernachlässigbar sind. An dieser Stelle wären weitere Untersuchungen nötig, um die Größe der Schubeinflüsse auf die Durchbiegung in Abhängigkeit der Geometrieparameter zu überprüfen.

4.7 Fazit

Zusammenfassend konnten folgende Erkenntnisse aus den linearen Untersuchungen gewonnen werden.

- Das verwendete Volumenelement BRICK27 approximiert sehr gut die Normalspannungen und gut die Schubspannungen im Vergleich zu theoretischen Berechnungen.
- Unter Verwendung von nur einem Element über die Steg- und Gurt Dicke kann das Volumenelement BRICK27 die theoretischen Torsionsschubspannungen nahezu exakt abbilden.
- Schubverzerrungen bzw. Querschnittsverwölbungen und deren Einfluss auf die Durchbiegung können vom FE-Modell sehr gut abgebildet werden.
- Schubverzerrungen und dessen Folgen auf die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit sind, auch bei nicht gedrunenen Trägern, nicht immer vernachlässigbar.

Die Verifizierung der linearen Untersuchung gewährleistet eine prinzipielle Verwendbarkeit des FE-Modelles und des verwendeten Volumenelementes BRICK27 für nichtlineare Untersuchungen.

5 Nichtlineare Untersuchung

5.1 Einführung

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die Anwendbarkeit des FE-Modells anhand von Vergleichsrechnungen im Rahmen der linearen Untersuchungen durchgeführt wurde, sollen nun in diesem Abschnitt die Ergebnisse der nichtlinearen Untersuchungen beschrieben, verifiziert und ausgewertet werden.

Dies wird mit Hilfe des Vergleiches von Grenzlasterfaktoren aus analytischen und numerischen Berechnungen durchgeführt. Auch die Verformungs-Last-Kurven werden zur Kontrolle herangezogen. Eine Gegenüberstellung der analytischen und numerischen Schnittgrößen wird angeführt, um die Qualität der Ergebnisse zu beurteilen. Anschließend erfolgt die Beschreibung der Erkenntnisse über die auftretenden Spannungsverläufe und Spannungsumlagerungen während des Plastifizierungsvorganges.

5.2 Vergleich der Grenzlasterfaktoren

Zunächst werden die elastischen und plastischen Grenzlasterfaktoren analytisch und numerisch bestimmt, um das FE-Modell auch für nichtlineare Untersuchungen zu verifizieren. Dies ist in Tabelle 5 dargestellt. Die Lastinkremente der Einzelbeanspruchung entsprechen 5% der jeweiligen Last mit dem Lastfaktor (LF) 1.00. Nach den Gleichungen in Abschnitt 4 wurden die analytischen Grenzlaster bestimmt. Für die numerischen Grenzlaster werden folgende Vereinbarungen getroffen.

- Die numerische elastische Grenzlaster ist diejenige Last, bei der die von Mises-Vergleichsspannung in mindestens einem Integrationspunkt die Grenzlaster erreicht.
- Die numerische plastische Grenzlaster ist diejenige Last, bei der die Iteration gerade noch zu einem inneren Gleichgewichtszustand nach Gleichung (5) führt.

Analog werden die Grenzlasterfaktoren festgelegt. Als prozentuale Abweichung wird das Verhältnis $100 \cdot (A^{\text{numerisch}} - A^{\text{analytisch}}) / A^{\text{analytisch}}$ definiert. Es ist eine gute Übereinstimmung der analytischen und numerischen Ergebnisse zu verzeichnen. Alle Abweichungen liegen in einer Toleranzgrenze von 10%. Dennoch sollen einige ausgewählte Werte näher betrachtet werden.

Auffallend ist die sehr gute Übereinstimmung der plastischen Grenzmomente $M_{x,pl}$. Die Berechnung des analytischen Grenzmomentes erfolgte mit Hilfe der einfachen unabhängigen Biegung der Gurte. Es wurden keine Schubspannungseinflüsse berücksichtigt. Dies lässt die Vermutung zu, dass die Schubspannung in diesem Fall keinen Einfluss auf

		Grenzlast $[N; Nm]$		Abwei- chung
		analytisch	numerisch	
N_x	$N_{x,el}$ (LF)	3 432 000 (5,28)	3 350 590 (5,15)	-2.4%
	$N_{x,pl}$ (LF)	3 432 000 (5,28)	3 350 590 (5,15)	-2.4%
M_x	$M_{x,el}$ (LF)	13 570 (13.80)	13 172 (13.4)	-2.9%
	$M_{x,pl}$ (LF)	28 831 (29.3)	28 507 (29.0)	-1.1%
M_y	$M_{y,el}$ (LF)	386 992 (2.37)	350 880 (2.15)	-9.3%
	$M_{y,pl}$ (LF)	429 713 (2.63)	440 640 (2.70)	2.5%
M_z	$M_{z,el}$ (LF)	136 848 (2.40)	139 650 (2.45)	2.0%
	$M_{z,pl}$ (LF)	212 808 (3.73)	219 450 (3.85)	3.1%

Tabelle 5: Verifikation der Einzelbelastungen; Lastinkrement 5% von LF1.00

die plastische Grenztragfähigkeit hat. Sehr gering ist auch der Unterschied der elastischen Grenzmomente $M_{x,el}$. [Wagner, 2002] führte ebenfalls Untersuchungen an einem HEB300 Träger durch. Der Unterschied zu dessen Ergebnissen beträgt für das elastische Grenztorsionsmoment $M_{x,el}$ etwa 2.5%.

Weiterhin sind die elastischen Grenzmomente $M_{y,el}$ auffallend. Es wurde mit Hilfe der FE-Berechnung eine extrem geringere Tragfähigkeit ermittelt. Hier spiegelt sich vermutlich der Einfluss der Schubverzerrung, wie in Abschnitt 3 beschrieben, wieder.

	Grenzlastfaktor		
	elastisch	plastisch	plastisch nach [Werner, 2002]
M_x	13.4	29.0	24.5
$N_x - M_y - M_z$	1.00	1.83	1.78
$N_x - M_x - M_y - M_z$	0.94	1.83	1.78
$N_x - (-M_x) - M_y - M_z$	1.07	1.83	1.78

Tabelle 6: Grenzlastfaktoren; Lastinkrement 1% von LF1.00

In Tabelle 6 sind die Grenzlastfaktoren für die untersuchten Lastkombinationen angegeben. Die entsprechenden Grenzbelastungen ergeben sich aus der Multiplikation der Grenzlastfaktoren mit den entsprechenden Werten aus Tabelle 2. Es zeigt sich, dass das zusätzliche Torsionsmoment einen geringen Einfluss auf den elastischen Grenzlastfaktor hat, wobei der plastische Grenzlastfaktor davon unberührt bleibt. Die Lastinkremente wurden zu 1% der jeweiligen Last mit dem Lastfaktor (LF) 1.00 gewählt. Um den Unterschied besser heraus zu arbeiten, ist eine weitere Verringerung der Lastinkremente nötig.

5.3 Verformungen

Abbildungen 30, 31 und 33 zeigen die Verformungen unter den jeweiligen Beanspruchungssituationen im Querschnitt $x=2.0=l/2$. Es sind die Übergänge vom linear elastischen zum elasto-plastischen Materialverhalten gekennzeichnet.

Teilweise lagen Ergebnisse aus den Berechnungen mit einem 7-Freiheitsgrade Beamelement nach [Werner, 2002] und [Müller, 2001] vor, welche mit den eigenen in Tabelle 7 verglichen wurden. Das Verhältnis $100 \cdot (A^{Beamel.} - A^{BRICK27}) / A^{BRICK27}$ definiert die prozentuale Abweichung.

			Verformungen in [mm] bzw. [–] nach		Abwei- chung [%]
			BRICK27	7-F.g. Beamel.	
M_x	LF24.5	ϕ_x	0.161	0.154	-4.3%
$N_x - M_x - M_y - M_z$	LF1.78	u_y	34.433	30.873	-10.3%
		u_z	32.706	25.156	-23.1%
		ϕ_x	0.110	0.093	-15.5%

Tabelle 7: Vergleich der Verformung bei gleichen LF

Eine gute Übereinstimmung konnte bei alleiniger Torsionsmomentenbeanspruchung herausgearbeitet werden. Eher mäßige Erfolge sind bei der Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$ zu verzeichnen. In allen Ergebnissen sind die Verformungen, berechnet aus dem FE-Modell aus Volumenelementen BRICK27, immer größer, obwohl die Grenztragfähigkeiten noch nicht erreicht wurden. Es liegt die Vermutung nahe, dass dieses zwar weicher im Gesamtsystem ist, aber besser in der Lage ist, interne Spannungsumlagerungen durchzuführen, um so höhere Grenztragfähigkeiten zu erreichen. Die Problematik der Spannungsumlagerungen wird im Abschnitt 5.5 ausführlich erläutert.

Da keine vollständigen Verformungs-Last-Diagramme zur Verfügung standen, waren keine Vergleiche der prinzipiellen Verläufe möglich. Die plastischen Grenzlastfaktoren nach [Werner, 2002] und [Müller, 2001] werden in den eigenen Kurven jeweils mit dem Zeichen „W“ markiert, die Eigenen mit „G“.

Die Verformungs-Last-Diagramme zufolge den Einzelbelastungen M_x , M_y und M_z sind in Abbildung 30 dargestellt. Auffallend ist die große Zunahme der Verformungen in den letzten Laststufen der Beanspruchung zufolge M_x und M_z , im Gegensatz zur Beanspruchung zufolge M_y . Der Grund könnte in zu großen Lastschritten für die M_y -Beanspruchung liegen, da hierbei in den letzten Lastschritten nur noch der Steg für weitere Beanspruchungsaufnahmen zur Verfügung steht. Unter Verwendung kleinerer Lastschritte würde sich auch hier eine horizontal ausklingende Verformungs-Last-Kurve einstellen.

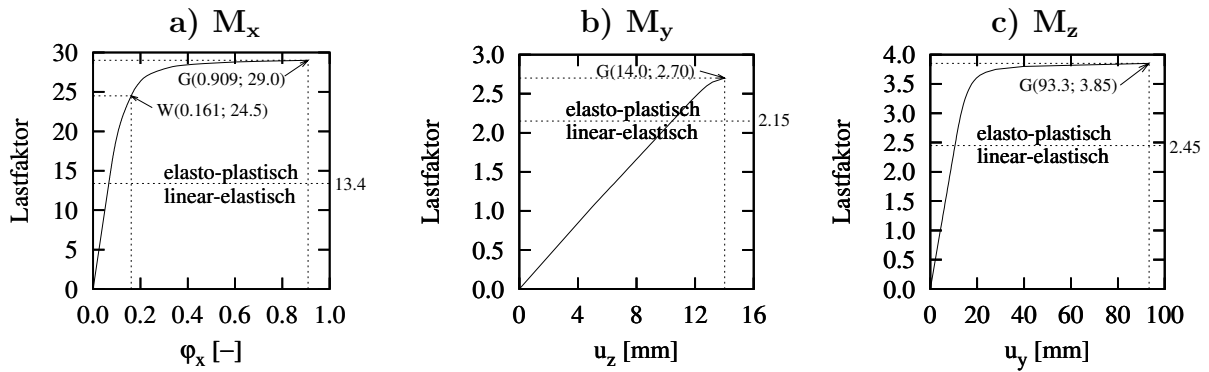


Abbildung 30: Verdrehung φ_x , Verschiebung u_y und u_z zufolge unterschiedlicher Beanspruchung

Abbildung 31 zeigt das Verformungsverhalten in Abhängigkeit der Laststufen für die Beanspruchung $N_x - M_y - M_z$. Es ist zu beachten, dass hier kein externes Torsionsmoment eingeleitet wird. Somit ist auch keine Verdrehung bei elastischem Materialverhalten zu verzeichnen. Nach Erreichen des elastischen Grenzlasterfaktors ist jedoch eine allmähliche Verdrehung des Querschnittes zu erkennen, deren Zuwachs mit fortschreitender Plastizierung größer wird.

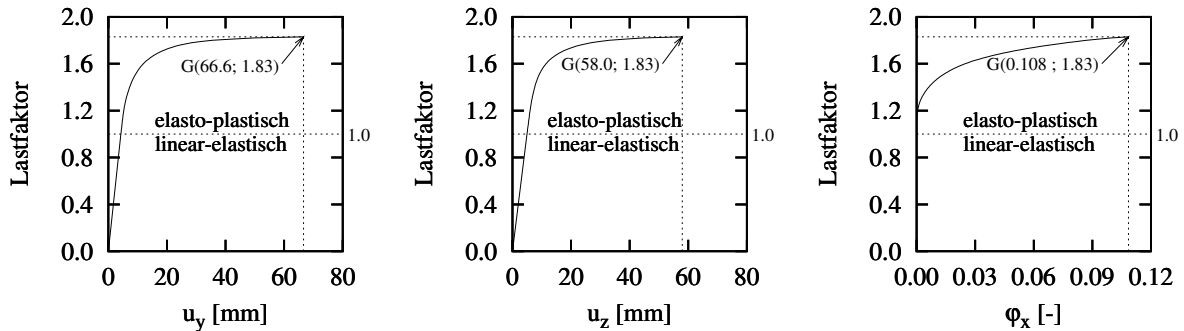


Abbildung 31: Verschiebung in y- und z-Richtung und Verdrehung um x-Achse in Trägermitte zufolge $N_x - M_y - M_z$

Eine Möglichkeit der Erklärung zeigt [Werner, 2002]. Hier wird die Rotation des Querschnittes durch unsymmetrisches Plastizieren erklärt. Somit kommt es zu einer Verlagerung des Schubmittelpunktes. Werden nun die Kräfte zur Erzeugung des Momentes M_z über gleichgroße Kräfte in die Gurte eingeleitet, so kommt es zu einem zusätzlichen Torsionsmoment und somit zu einer Verdrehung. Abbildung 32 zeigt übersichtlich diesen Vorgang.

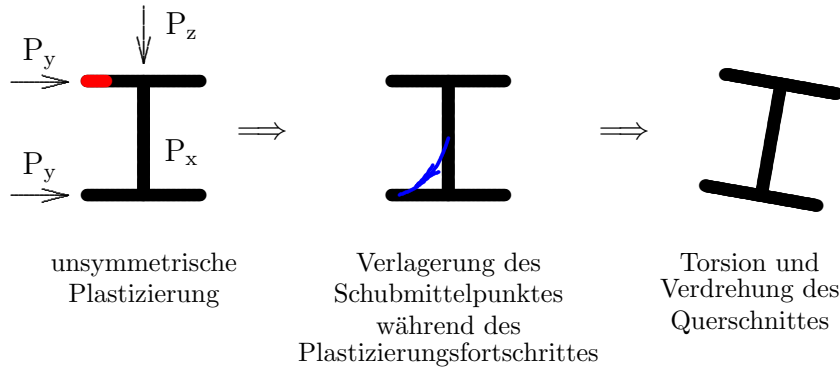
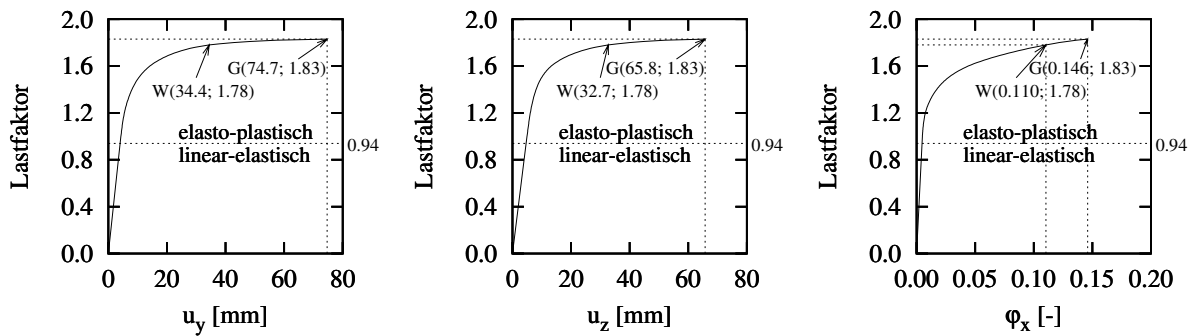


Abbildung 32: Verdrehung infolge unsymmetrischer Plastizierung

Der gleiche Effekt ist in Abbildung 33 zu erkennen. Die plastische Verdrehung entsteht jedoch infolge einer Umlagerung von eingetragenen Torsionsmoment und zusätzlich entstehendem Torsionsmoment infolge der Schubmittelpunktsverlagerung. Vergleicht man die maximalen Verdrehungen nach den Abbildungen 31 und 33 so erkennt man, dass die zusätzliche Verdrehung infolge des eingetragenen Torsionsmomentes nur etwa 25% beträgt. Der größte Anteil der plastischen Verdrehung entsteht infolge der Schubmittelpunktsverlagerung. Die gleichen Aussagen sind beim Vergleich der Verschiebungen zu treffen. Sie sind infolge des zusätzlich eingetragenen Torsionsmomentes nur geringfügig größer. Dies erklärt auch den nahezu identischen plastischen Grenzlasterfaktor für beide Beanspruchungen.

Abbildung 33: Verschiebung in y- und z-Richtung und Verdrehung um x-Achse in Trägermitte zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$

Die Verformungen der Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$ nach Abbildung 34 zeigen ähnliches Verhalten. Interessant ist die Verdrehung, welche infolge des eingetragenen negativen Torsionsmomentes, zu Beginn negativ ist. Nach dem Erreichen des Lastfaktors 1.23 ist der Zuwachs des Torsionsmomentes infolge Plastizierung größer. Die Rotation strebt wieder gegen Null und wird dann positiv. Auch hier zeigt sich, dass das eingetragene Torsionsmoment, in der hier gewählten Dimension, keine großen Auswirkung auf die plastische Grenzlaster hat. Der Einfluss auf die Verdrehung ist erheblicher. So wird in diesem Fall nur 50% der Verdrehung zufolge der Beanspruchung mit positiv einwirkendem Torsionsmoment erreicht. Die Verschiebungen sind eher unbeeinflusst.

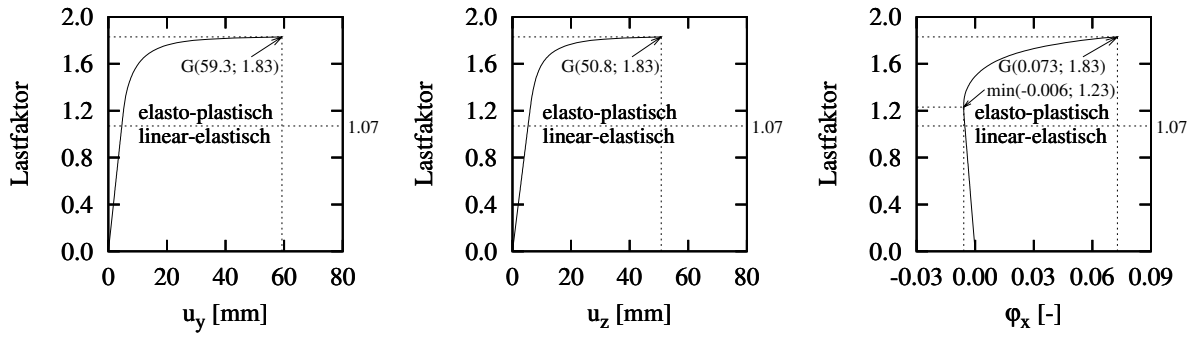


Abbildung 34: Verschiebung in y- und z-Richtung und Verdrehung um x-Achse in Trägermitte zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$

5.4 Vergleich der analytischen und numerischen Schnittgrößen

Eine weitere Verifikation des Modelles wird mit Hilfe des Vergleiches der analytischen und numerischen Schnittgrößen ermöglicht. Die analytischen Schnittgrößen sind die theoretischen Schnittgrößen, deren Verlauf bereits in Abschnitt 4 gezeigt wurde. Gleichung (25) stellt die Integration der jeweiligen Spannungen dar, welche den numerischen Schnittgrößen entsprechen.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_A \sigma_x dA & M_x &= \int_A \tau_{xy} z + \tau_{xz} y dA \\
 V_y &= \int_A \tau_{xy} dA & M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\
 V_z &= \int_A \tau_{xz} dA & M_z &= \int_A \sigma_x y dA
 \end{aligned} \tag{25}$$

Da die Spannungen nicht in jedem Punkt des Querschnittes vorliegen, wird die Integration über den Mittelwert der jeweiligen Spannung und der jeweiligen Schnittfläche des Elementes durchgeführt.

Der Mittelwert der Spannung des Elementes wird mit dem `SLang`-Befehl

`stress extract, element_center, stress_case elem_number, output_stress/` bestimmt. Dieser wichtet die Spannungsanteile aus den 27 Integrationspunkten entsprechend den Ansatzfunktionen.

Der Vergleich wurde für ausgewählte Beanspruchungssituationen vorgenommen und ist in Abbildung 35 dargestellt. Das Verhältnis $100 \cdot (A^{\text{numerisch}} - A^{\text{analytisch}}) / A^{\text{analytisch}}$ beschreibt die prozentuale Abweichung. Auffallend ist die durchgehend sehr gute Übereinstimmung der Normalkräfte und Biegemomente. Es ist somit anzunehmen, dass die numerischen Normalspannungen den theoretischen Annahmen entsprechen und korrekt abgebildet werden können.

Anders verhält es sich mit den Schubspannungen bzw. Querkraften und Torsionsmomenten. Hierbei ergeben sich teilweise Abweichungen von mehr als 80% im plastischen Grenz-

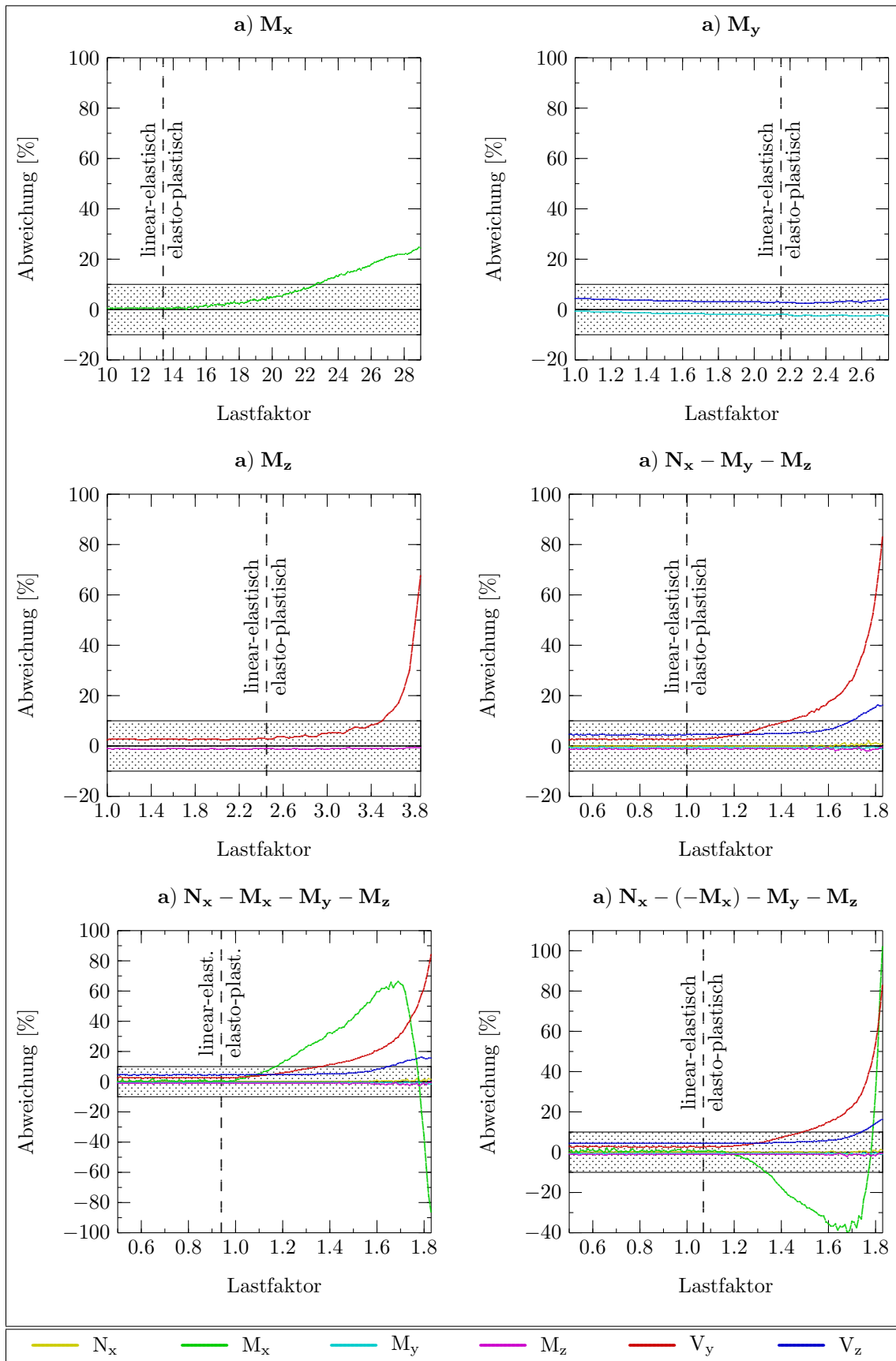


Abbildung 35: Abweichung der numerischen zu den analytischen Schnittgrößen im Querschnitt $x=2.10$ für die jeweilige Beanspruchungssituation

zustand. Naheliegend ist ein Fehler in der Elementformulierung, was jedoch aufgrund der Übereinstimmung im elastischen Bereich ausscheidet. Ebenfalls spricht die Übereinstimmung der Querkraft zufolge M_y für die Richtigkeit der nichtlinearen Lösung. Um die Isometrie der Elementformulierung zu überprüfen, wurde der Querschnitt gedreht, was jedoch zum gleichen Ergebnis führte.

Es muss also eine spezifische Besonderheit sein, die nur im Zusammenhang mit einer V_y Beanspruchung auftritt, was auch das Abweichen des Torsionsmomentes erklären würde. Anzuführende Ideen sind Lockingeffekte in der FE-Berechnung und Abweichungen der analytischen Lösung infolge Querschnittsverwölbung oder Querschnittsverzerrung. Im Rahmen dieser Studienarbeit konnte ein Fehler trotz intensiver Untersuchung nicht gefunden werden. Es liegt also eine mechanische Erklärung für diese Abweichungen sehr nahe, welches jedoch aus Zeitgründen nicht weiter verfolgt wurde.

Da der Einfluss des Torsionsmomentes besonders untersucht werden soll, werden die Torsionsmomente nochmals einzeln in Abbildung 36 betrachtet. Aus vorhergehenden Betrachtungen ist bereits bekannt, dass diese neben den Schubspannungen ebenfalls große Abweichungen zu den analytischen Berechnungen aufweisen. Es entsteht sogar ein Torsionsmoment durch die Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$, welches die graue Kurve darstellt. Die blauen Kurven sind jeweils die numerisch berechneten Torsionsmomente, und die roten Kurven die analytisch berechneten Werte. Aus der Differenz der numerischen Lösung (blau) und der numerischen Lösung aus der Beanspruchung zufolge $M_x - M_y - M_z$ (grau) ergibt sich die absolute Differenz (grün).

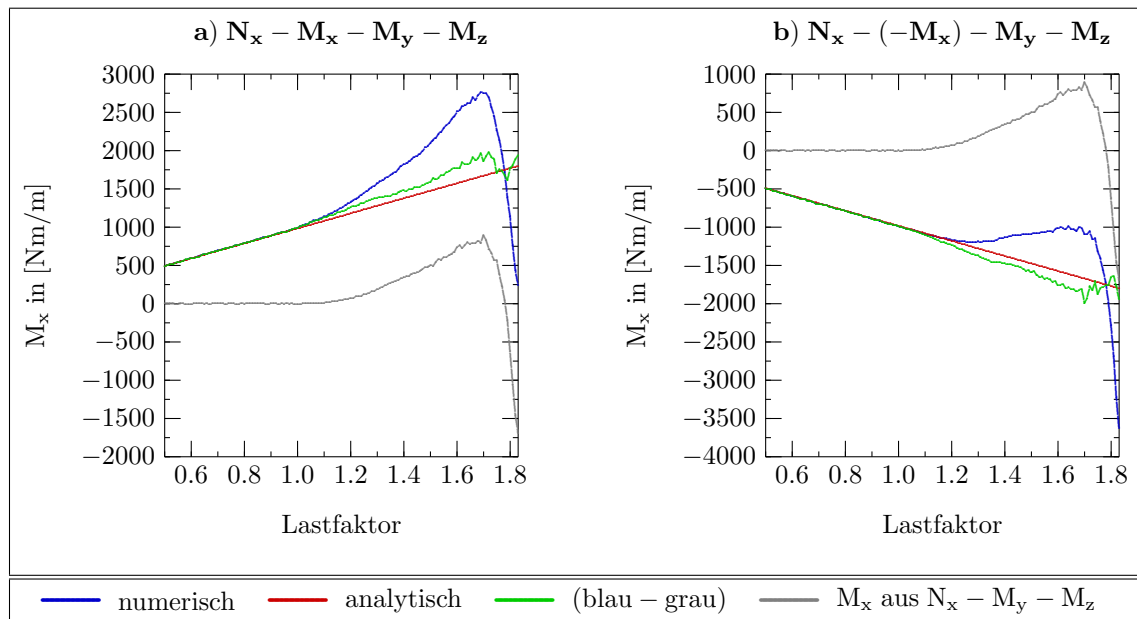


Abbildung 36: Vergleich der Torsionsmomente aus unterschiedlichen Belastungen

Es ist zu erkennen, dass die jeweiligen analytischen Lösungen annähernd der grünen Differenzkurve entsprechen. Die absolute Abweichung für die Beanspruchungen zufolge

$N_x - M_y - M_z$, $N_x - M_x - M_y - M_z$ und $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$ ist gleich.

Anhand der numerischen Lösung aus $N_x - M_y - M_z$ ist erkennbar, dass sich zu Beginn der Plastizierung ein positives Moment entwickelt, welches dann gegen Ende der Tragfähigkeit wieder kleiner und schließlich negativ wird. Die Ursache könnte eine sich sehr rasch verändernde Schubmittelpunktslage sein, welche [Werner, 2002] aufgrund des geringeren Grenzlasterfaktors nicht ermitteln konnte.

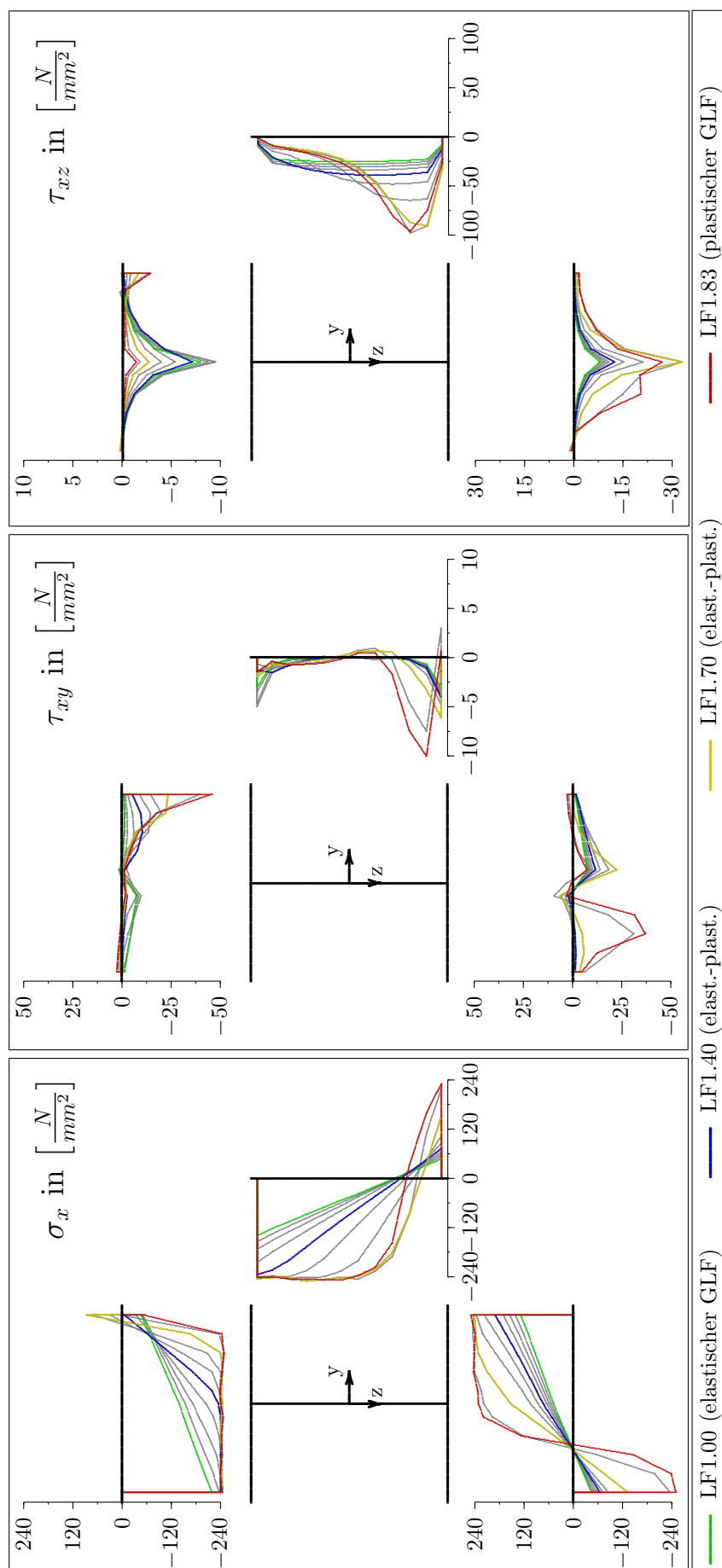
5.5 Spannungsumlagerungen

Einige grundlegende Gedanken zu Spannungsumlagerungen im Plastizierungsvorgang sind in [Petersen, 1993] und [Mang, 2000] zu finden. Es werden Ideen und Beispiele für einfache Beanspruchungen z.B. zufolge eines Biegemomentes beschrieben. Als interessant stellen sich die Verläufe der Schubspannungen heraus. Mit zunehmender Plastizierung weichen diese in noch nicht plastizierte Querschnittsanteile aus, behalten aber für diese einfachen Beanspruchungen ihre Gestalt.

Für kompliziertere Beanspruchungen sind jedoch wenige Aussagen getroffen worden. Deshalb werden hier Beanspruchungen zufolge $N_x - M_y - M_z$, $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$ und $N_x - M_x - M_y - M_z$ mit Hilfe der FEM untersucht. Zu Beginn sind die Unterschiede der Amplituden der drei Beanspruchungssituationen noch relativ groß. So ergeben sich unterschiedliche elastische Grenzlasterfaktoren (GLF). Gegen Ende des Plastizierungsvorganges werden die Unterschiede kleiner und haben nur noch geringe Auswirkungen auf die Tragfähigkeit.

Da sich die Spannungsverläufe im Wesentlichen nur in der Größe der Amplitude, nicht in der Gestalt unterscheiden, seien hier stellvertretend nur die Ergebnisse zufolge $N_x - M_y - M_z$ in Abbildung 67 dargestellt. Es sind jeweils die Spannungsverläufe für die elastischen und plastischen Grenzlasterfaktoren (GLF) farbig markiert. Weitere Darstellungen von Spannungsumlagerungen sind im Anhang angeführt.

Prinzipiell können hier die gleichen Aussagen, wie bei [Petersen, 1993] und [Mang, 2000] getroffen werden - die Schubspannungen weichen in noch nicht plastizierte Querschnittsanteile aus. Dabei ändert sich aufgrund der unsymmetrischen Plastizierung die gesamte Gestalt der Schubspannungsverläufe. Die größten Anteile der Schubspannungen sind nicht immer in den gleichen Querschnittsbereichen zu finden, sondern wandern im Verlauf der Plastizierung in noch nicht plastizierte Bereiche. Der Verlauf der Normalspannungen ist gegenüber den Schubspannungen immer dominierend. Somit sind einfache Interaktionsformeln, wie sie bei elastischem Materialverhalten oftmals angewendet werden, für plastische Tragfähigkeitsberechnungen nicht gültig.



Interessant sind die Spannungsverläufe des Lastfaktors (LF) 1.70. Dieser stellt den Wendepunkt für die Gestalt der Schubspannungen im Untergurt dar, da der Untergurt in dieser Beanspruchungssituation bereits stark zu plastizieren beginnt. Bis zum Grenzlasterfaktor (GLF) von 1.83 werden die Schubspannungen nochmals umgelagert, um eine optimale Verteilung im Querschnitt zu erreichen. Sogar die Normalspannung im Bereich des nicht vollständig plastizierten Steges beginnt sich nochmals grundlegend zu verändern. So werden einige Normalspannungen wieder kleiner, um eine bessere Auslastung des Querschnittes zu erreichen.

5.6 Fazit

Zusammenfassend konnten folgende Erkenntnisse aus den nichtlinearen Untersuchungen gewonnen werden.

- Das verwendete Volumenelement BRICK27 approximiert sehr gut die Normalspannungen nach theoretischen Annahmen. Die Schubspannungen weisen jedoch erhebliche Abweichungen auf.
- Eine Berücksichtigung der Schubspannungsumlagerungen in nicht plastizierte Bereiche hat geringe Auswirkungen auf die Grenzlasterfaktoren, jedoch teilweise starke Auswirkungen auf die Verformungen.
- Ein zusätzliches Torsionsmoment hat, auf eine Beanspruchung aus Normalkraft und beiden Biegemomenten, einen mittleren Einfluss auf die elastische und einen sehr geringen auf die plastische Grenztragfähigkeit.

6 Schlussfolgerung und Ausblick

Die vorliegende Studienarbeit konnte die Vorgänge der Spannungsumlagerungen im Plastizierungsprozess ausführlich darstellen. Weiterhin tragen diese Untersuchungen neue Erkenntnisse zum Themenkomplex Spannungsumlagerung, auch bei unsymmetrisch plastizierenden Querschnitten, bei. Einer der wichtigen Fragen nach dem Einfluss des Torsionsmomentes auf die Grenztragfähigkeit, infolge einer Beanspruchungssituation aus Normalkraft und beiden Biegemomenten, konnte nachgegangen werden. Es stellte sich ein kleiner Unterschied in den elastischen Grenztragfähigkeiten heraus, wobei die Unterschiede der plastischen Grenztragfähigkeiten verschwindend gering sind. Vielmehr ist es für praktische Anwendungen wichtig, ein Verformungskriterium für die Gebrauchstauglichkeit zu definieren.

Trotz der guten und zahlreichen Ergebnisse sind einige Fragen offen geblieben. Bei der Verifizierung des FE-Modelles mit Hilfe von Vergleichsrechnungen sind einige Abweichungen aufgetreten. Es wurde zwar versucht, diese durch entsprechende Ansätze zu erklären, doch müssen diese Thesen noch durch weitere Nachforschungen und Untersuchungen bestätigt werden. Somit regt der Autor zu eigenen Ideen und Forschungsaktivitäten an. So gilt es, den Einfluss der Verwölbung und Querschubverzerrung des Querschnittes auf den tatsächlichen Schnittgrößenverlauf, insbesondere der Querkraft und des Torsionsmomentes, bei nichtlinearem Materialverhalten zu untersuchen.

Während der Bearbeitung mussten einige Probleme im Zuge der FE-Modellierung überwunden werden. Das verwendete Volumenelement eignet sehr gut für die Grundlagenforschung, ist jedoch sehr unhandlich in praktischen ingenieurwissenschaftlichen Berechnungen. So ist es zu empfehlen, diese und auch weiterhin gewonnene Erkenntnisse für die Entwicklung eines robusten finiten Elementes zu verwenden. Es sollten dabei einfach handhabbare Lagerungsbedingungen und Lasteinleitungen, bei Integration wesentlicher innerer Beanspruchungssituationen und -umlagerungen möglich sein.

Die Erkenntnisse zur Spannungsumlagerung im Plastizierungsprozess zeigen, dass einfache Interaktionsformeln prinzipiell nicht anwendbar sind. Weiterführende Untersuchungen und Vergleichsrechnungen könnten Aufschluss über die praktische Relevanz bei Tragwerksberechnungen geben.

Literatur

- [Bathe, 1996] Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [Bićanić, 1978] Bićanić, N.; Johnson, K. (1978). „Who was 'Raphson'?”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [Bucher, 2002] Bucher, C. e. a. (2002). *SIANG -The Structural Language*, 5.0 Edition. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University of Weimar, Germany.
- [Kreyszig, 1983] Kreyszig, E. (1983). *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley, New York.
- [Mang, 2000] Mang, Herbert; Hofstetter, G. (2000). *Festigkeitslehre*. Springer, Wien.
- [Müller, 2001] Müller, A.; Werner, F. (2001). *Biegetorsionsberechnungen von dünnwandigen Profilpfetten im räumlichen Gesamtsystem*. In *Festschrift, Valtinat.* -, Hamburg.
- [Petersen, 1993] Petersen, C. (1993). *Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*, 3. Edition. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [Rubin, 2001] Rubin, H. (2001). *Das Tragverhalten von I-Trägern unter $N_x - M_y$ - und M_z -Beanspruchung nach Fließzonentheorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung der Torsionseinflüsse*. Stahlbau.
- [Schlechte, 1981] Schlechte, E. (1981). *Festigkeitslehre für Bauingenieure*, 4. Edition. Verlag für Bauwesen, Berlin.
- [Schneider, 1998] Schneider, K.-J. (1998). *Bautabellen für Ingenieure*, 13. Edition. Werner Verlag, Düsseldorf.
- [Wagner, 2002] Wagner, W.; Gruttmann, F. (2002). *Genaue Berechnung der elastischen Grenzmomente von Walzprofilen bei Torsionsbelastung*. Stahlbau.
- [Werner, 2002] Werner, Frank; Osterrieder, P. (2002). Plastic section capacity of steel beams with arbitrary loading. In *7th International Conference on Steel & Space Structures*, Singapore.

A Spannungsverläufe in Abhängigkeit der Lastfaktoren

Im Folgenden sind weitere Spannungsverläufe in Abhängigkeit der Lastfaktoren zu den unterschiedlichen Beanspruchungen angeführt. Die Spannungen sind im Querschnitt $x=2.10$, in den in Abbildung 19 dargestellten Punkten, ausgewertet.

A.1 Beanspruchung zufolge N_x

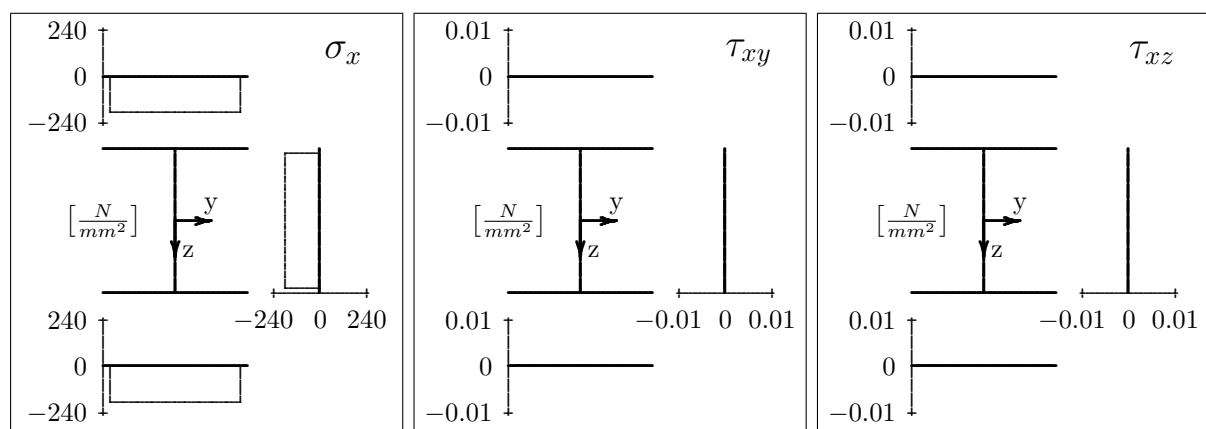


Abbildung 38: Beanspruchung zufolge N_x ; LF4.0

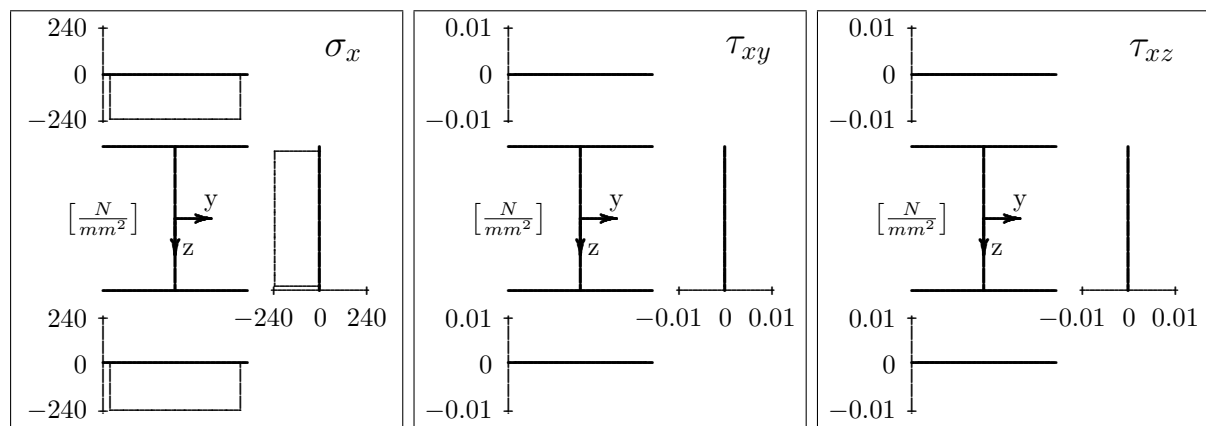
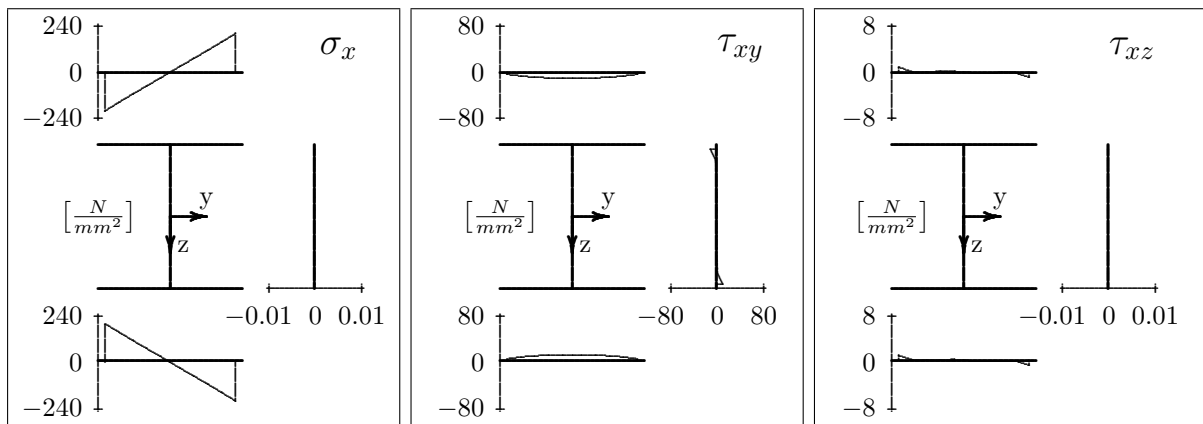
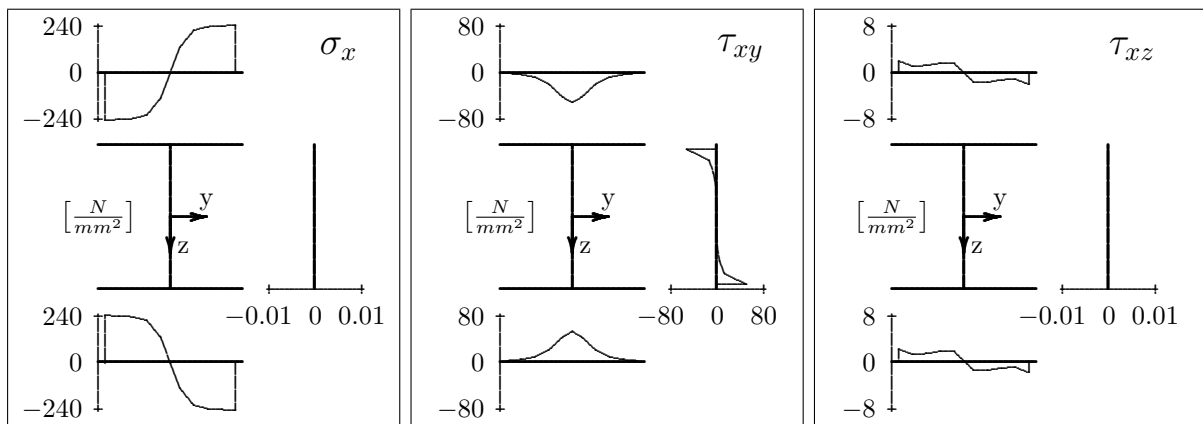
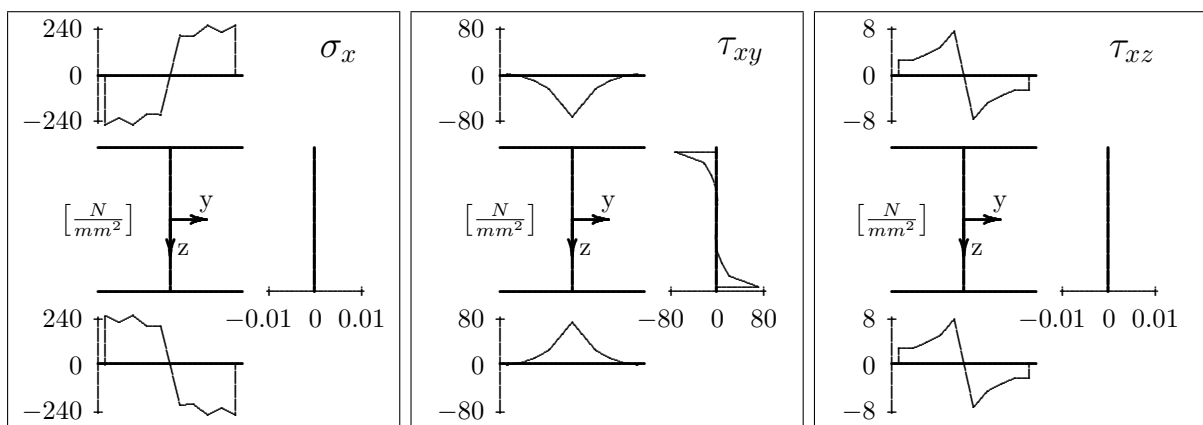


Abbildung 39: Beanspruchung zufolge N_x ; LF5.15

A.2 Beanspruchung zufolge M_x

Abbildung 40: Beanspruchung zufolge M_x ; LF13.4Abbildung 41: Beanspruchung zufolge M_x ; LF25.0Abbildung 42: Beanspruchung zufolge M_x ; LF29.0

A.3 Beanspruchung zufolge M_y

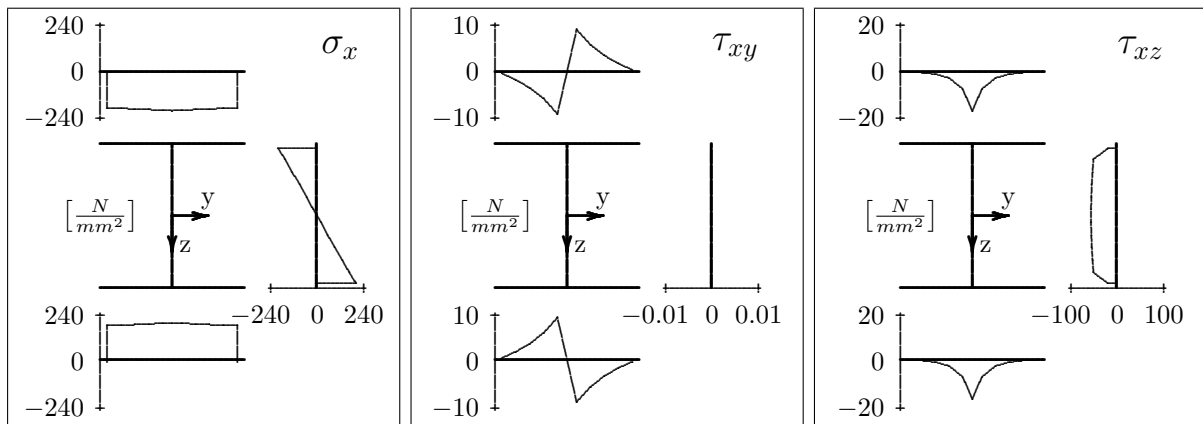


Abbildung 43: Beanspruchung zufolge M_y ; LF2.15

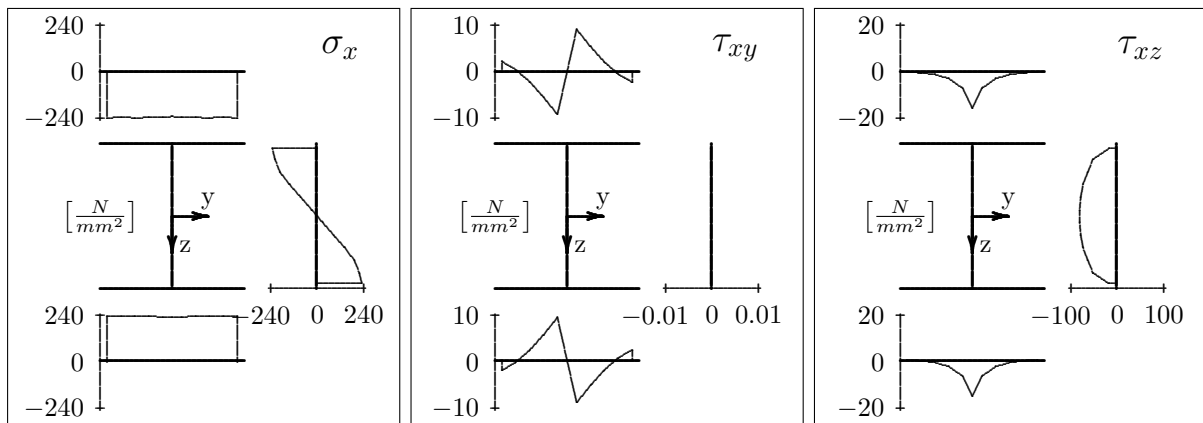


Abbildung 44: Beanspruchung zufolge M_y ; LF2.65

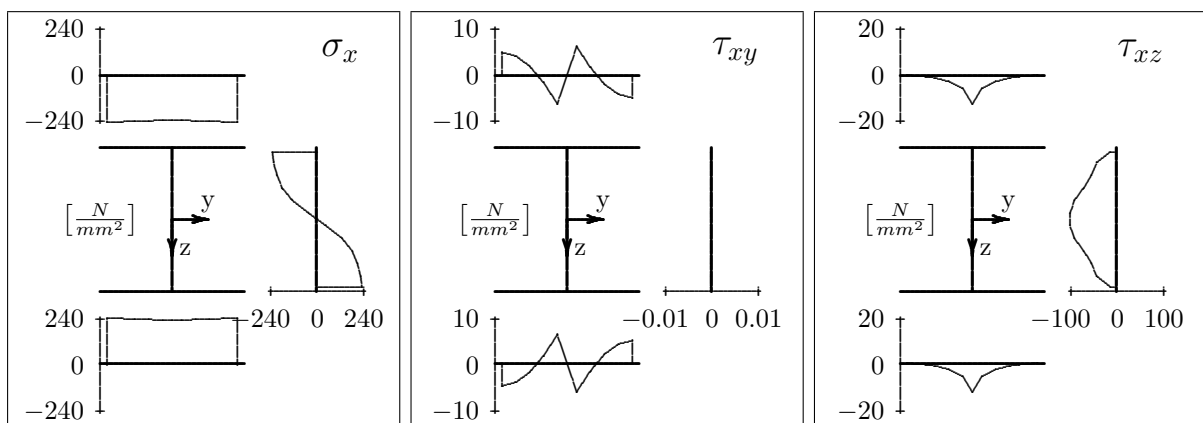


Abbildung 45: Beanspruchung zufolge M_y ; LF2.7

A.4 Beanspruchung zufolge M_z

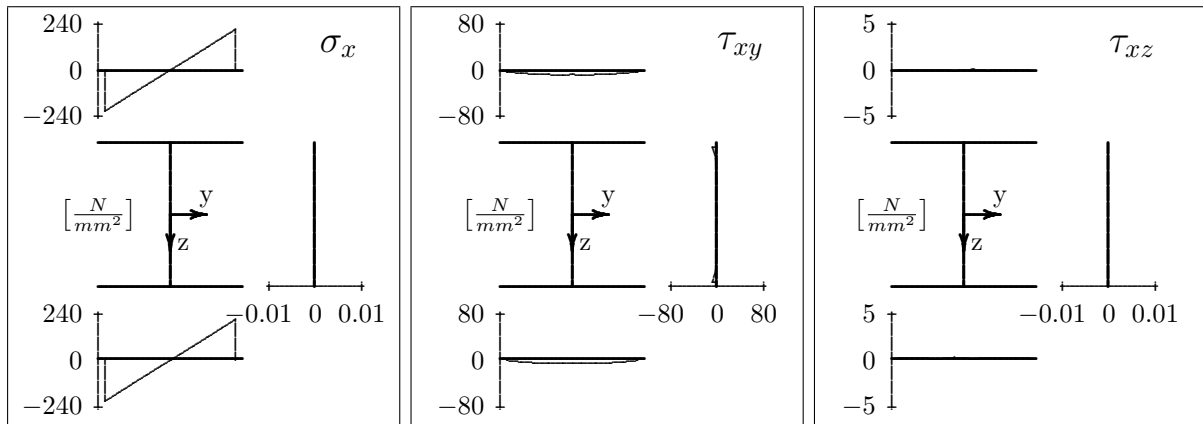


Abbildung 46: Beanspruchung zufolge M_z ; LF2.45

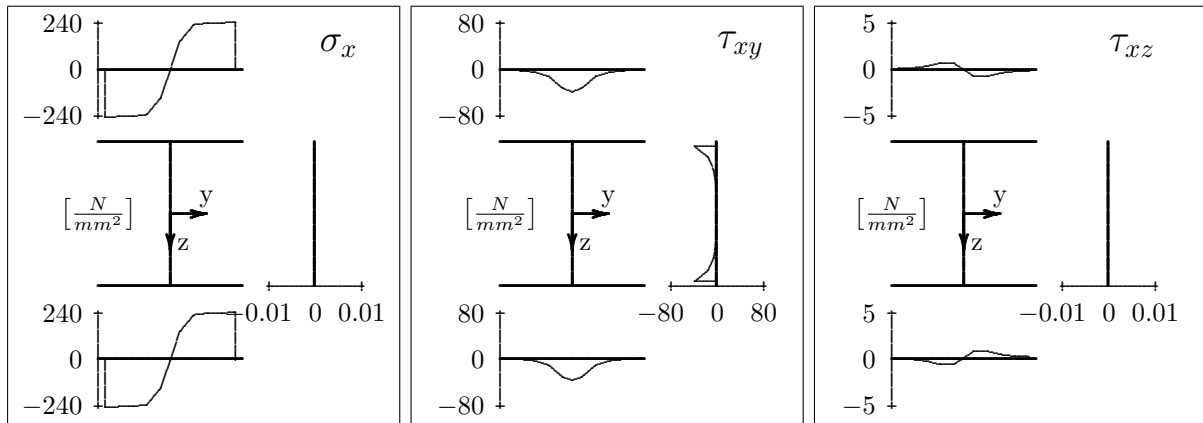


Abbildung 47: Beanspruchung zufolge M_z ; LF3.75

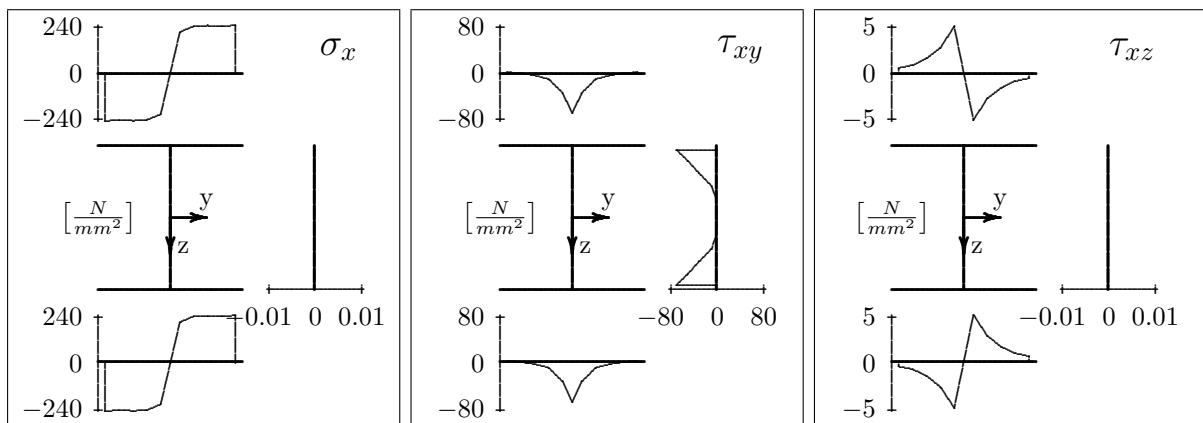


Abbildung 48: Beanspruchung zufolge M_z ; LF3.85

A.5 Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$ -Interaktion

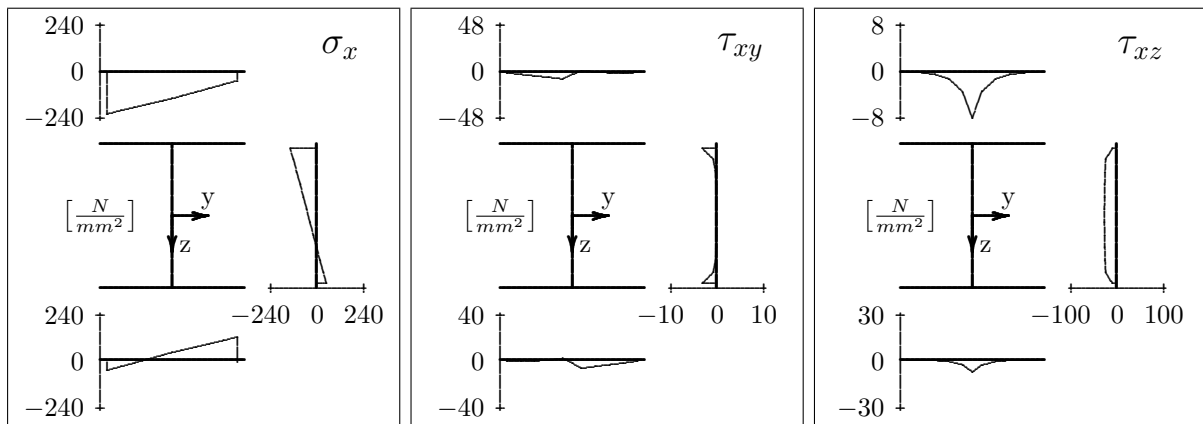


Abbildung 49: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.0

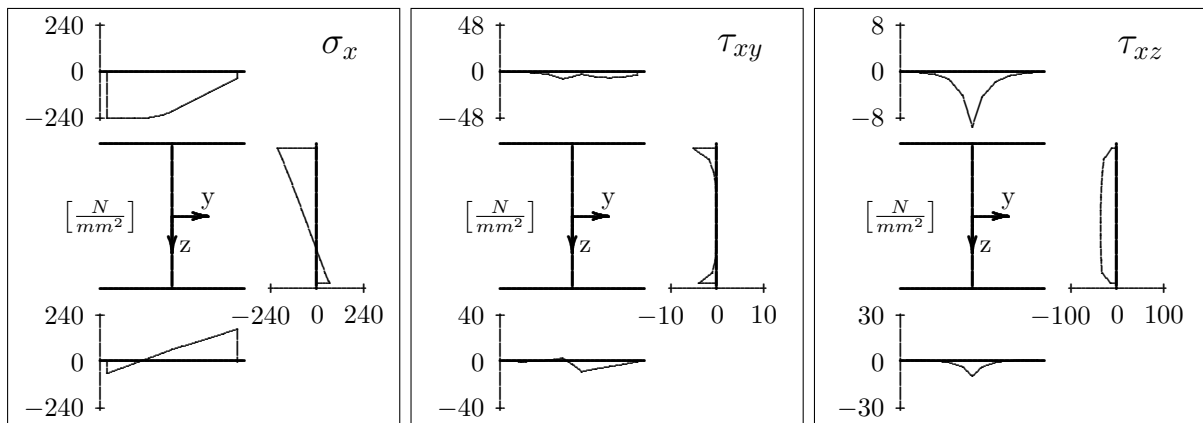


Abbildung 50: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.3

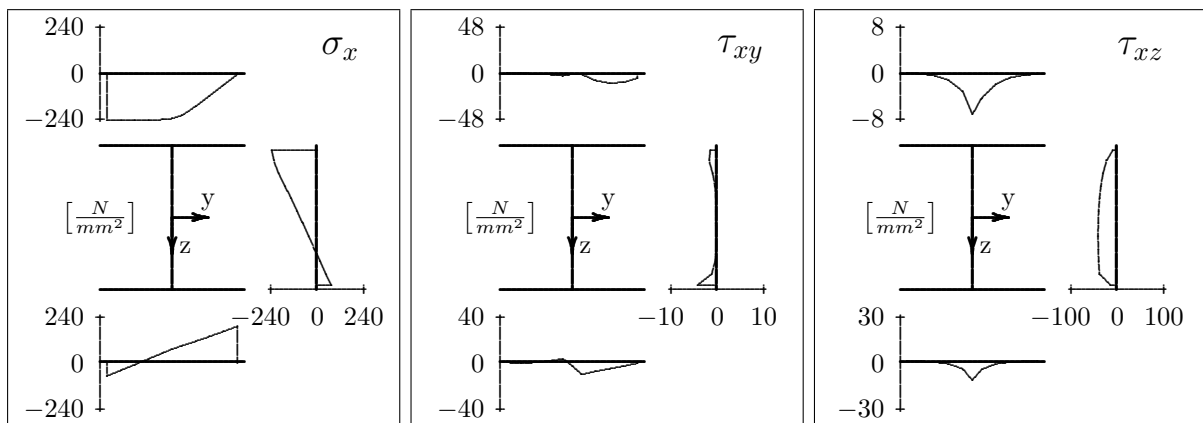
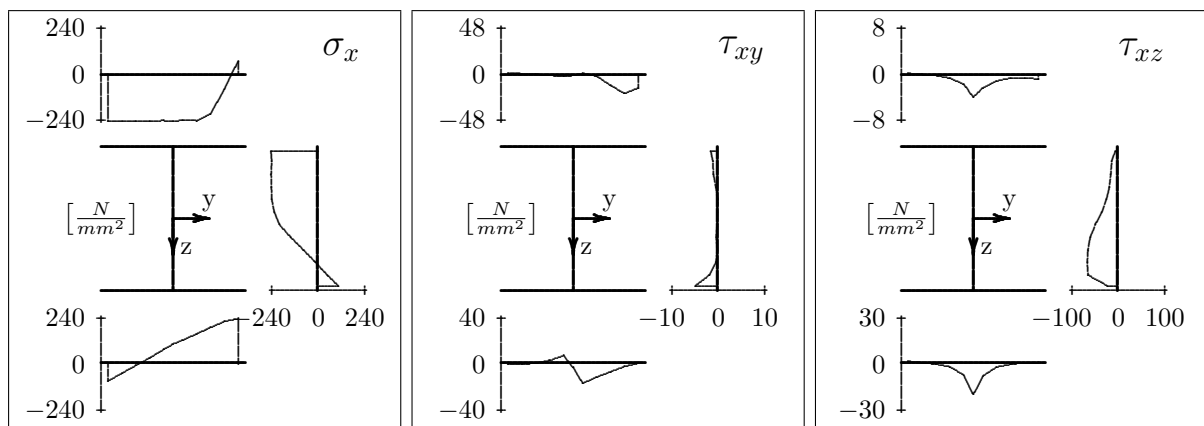
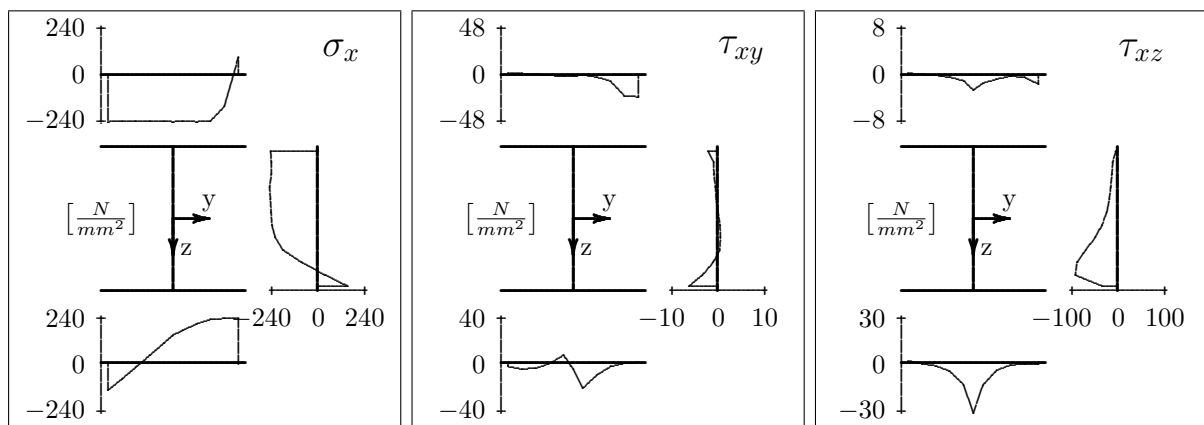
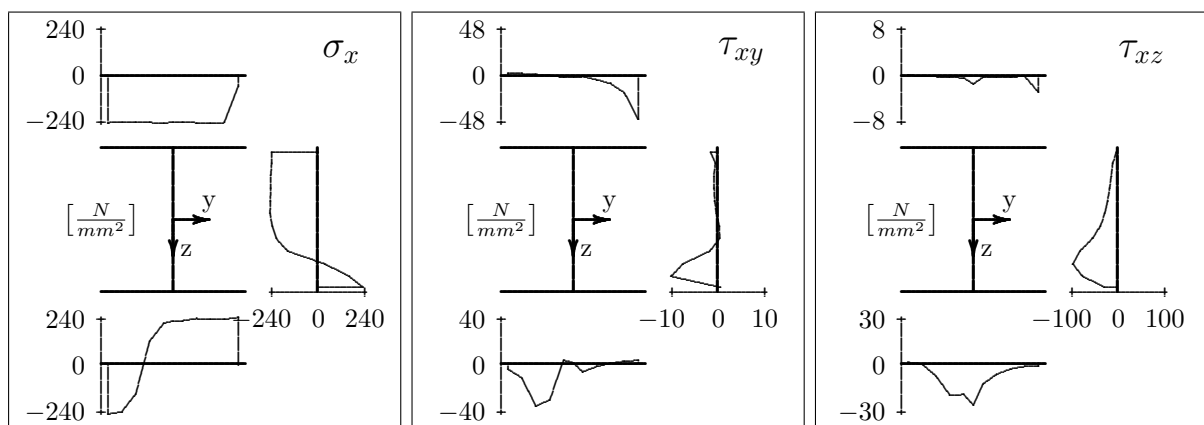


Abbildung 51: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.4

Abbildung 52: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.6Abbildung 53: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.7Abbildung 54: Beanspruchung zufolge $N_x - M_y - M_z$; LF1.83

A.6 Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$ -Interaktion

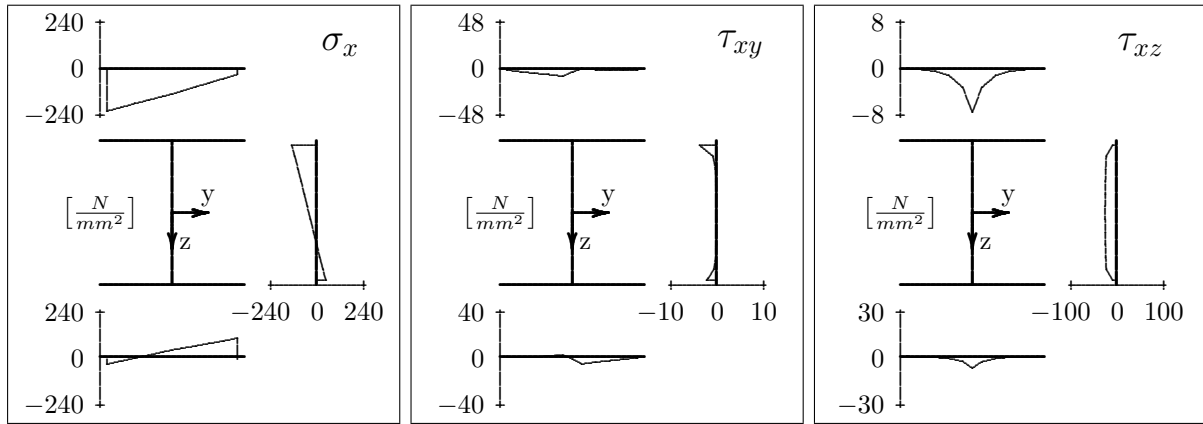


Abbildung 55: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF0.94

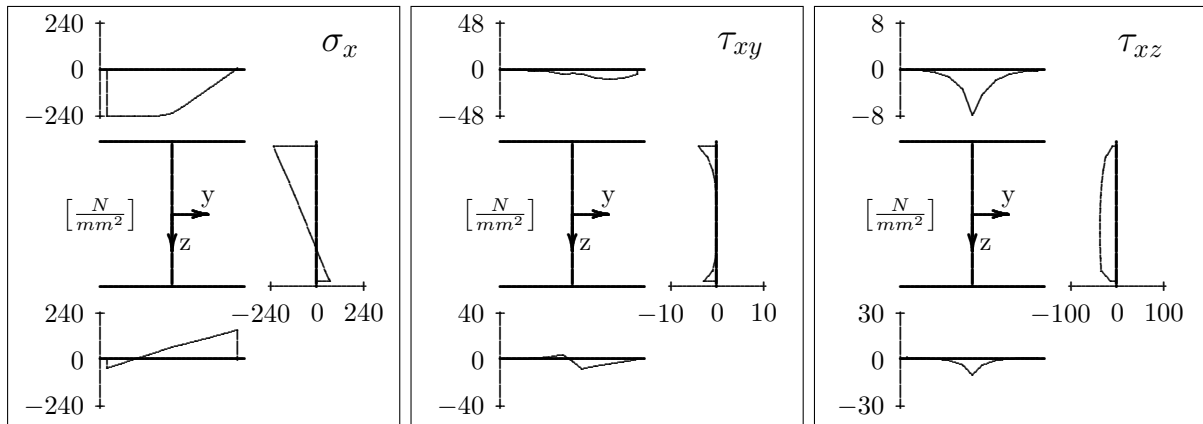


Abbildung 56: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF1.3

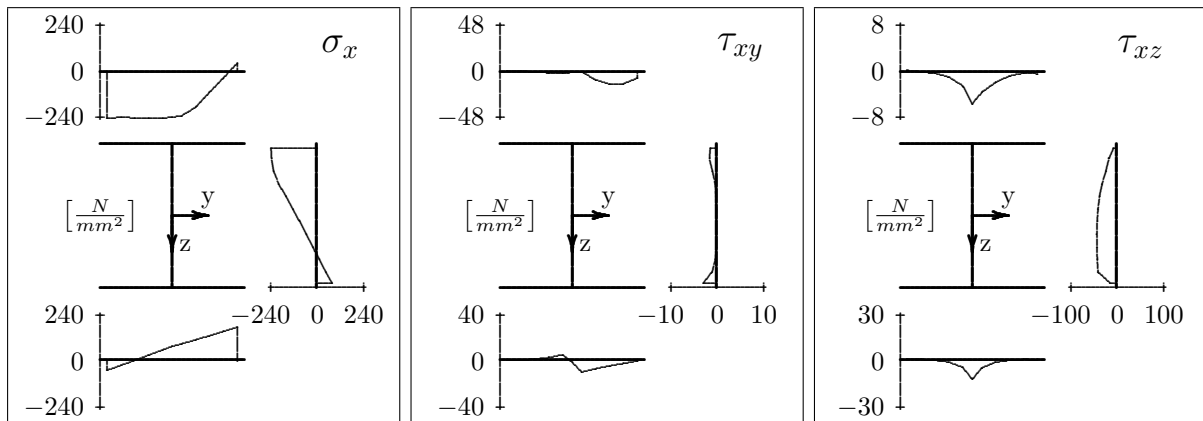
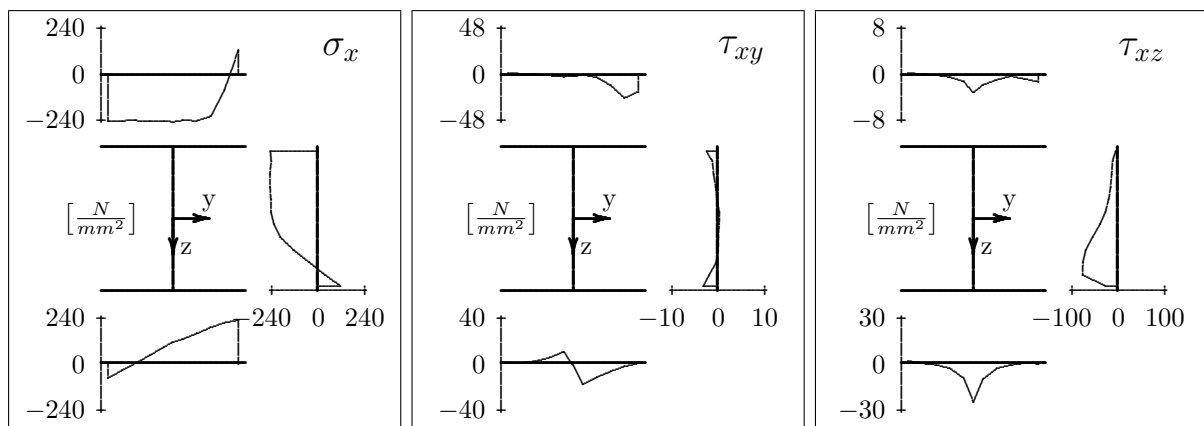
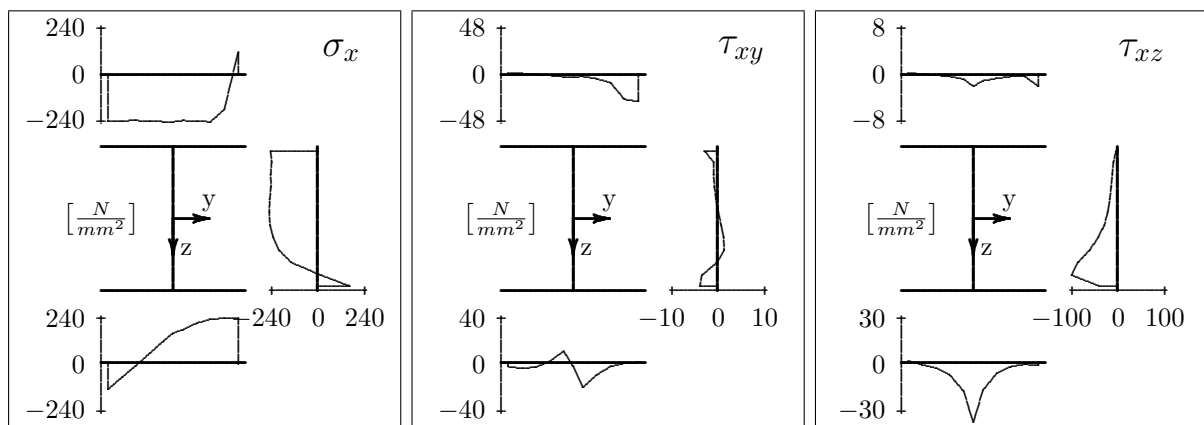
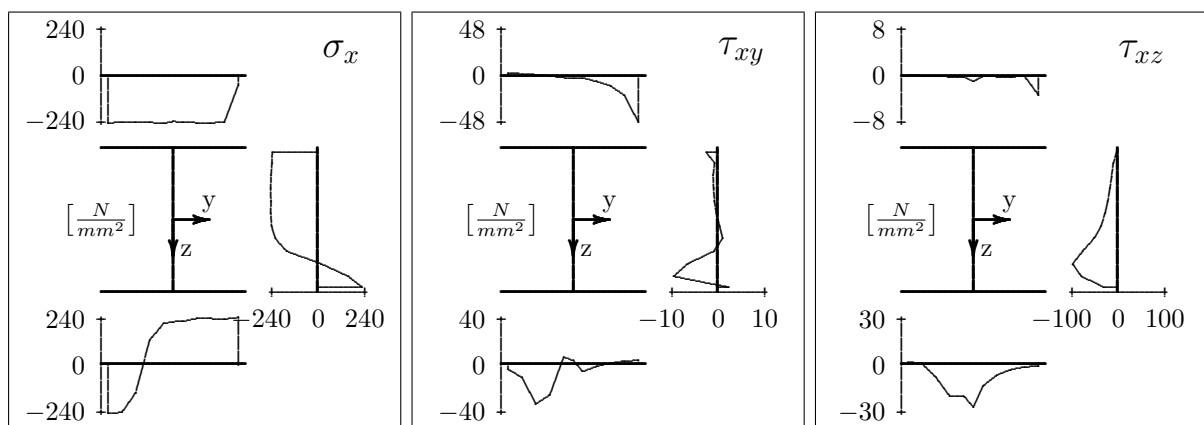


Abbildung 57: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF1.4

Abbildung 58: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF1.6Abbildung 59: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF1.7Abbildung 60: Beanspruchung zufolge $N_x - M_x - M_y - M_z$; LF1.83

A.7 Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$ -Interaktion

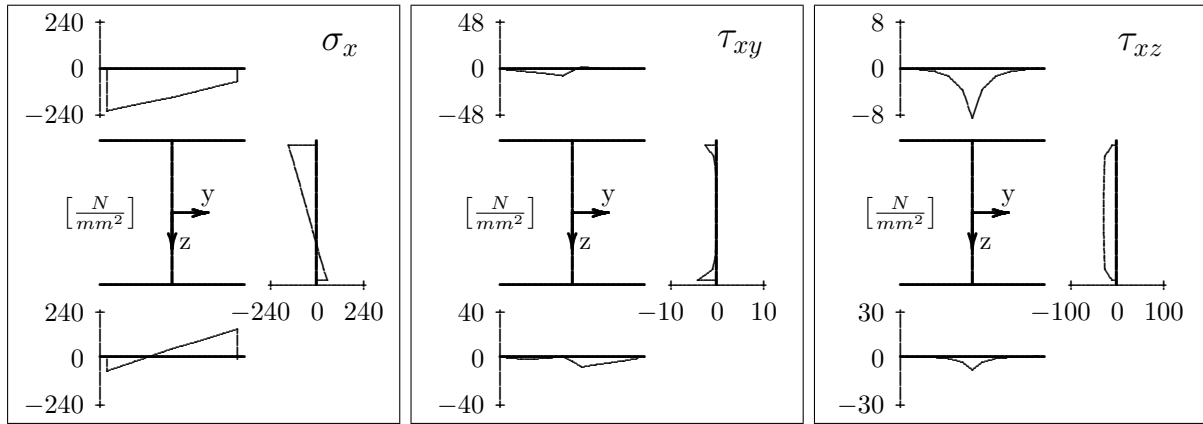


Abbildung 61: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.07

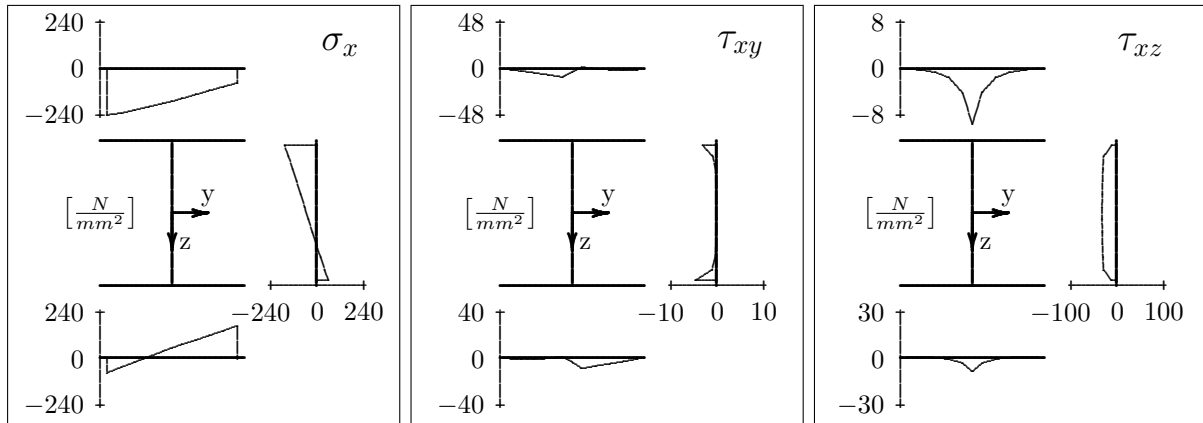


Abbildung 62: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.2

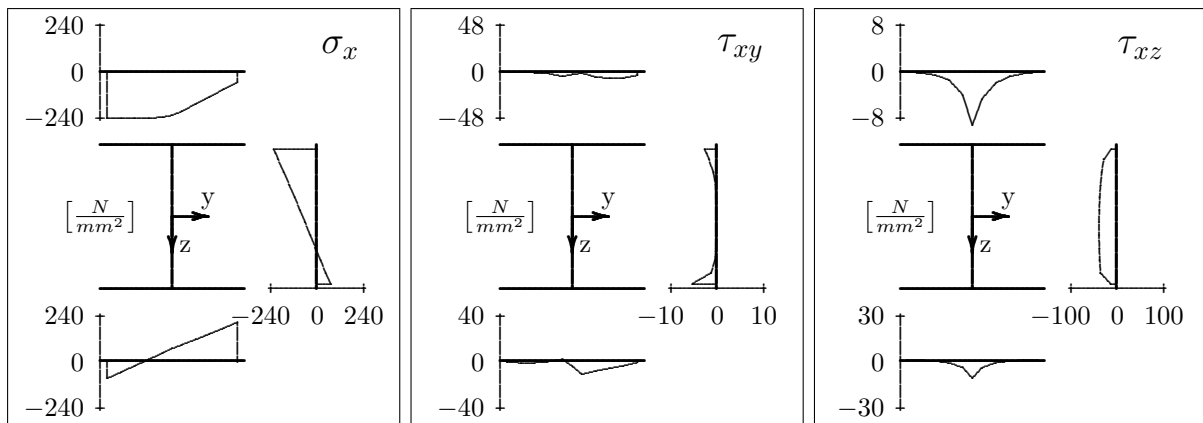
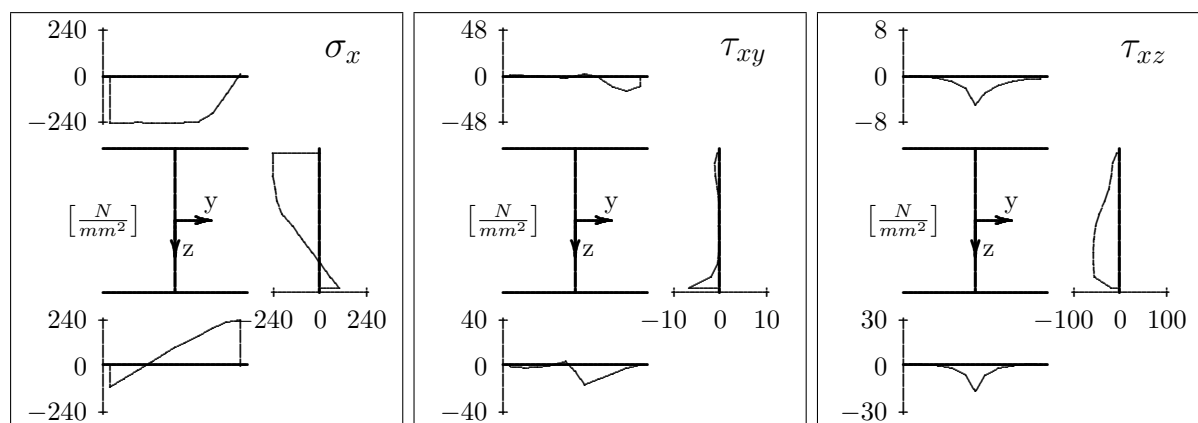
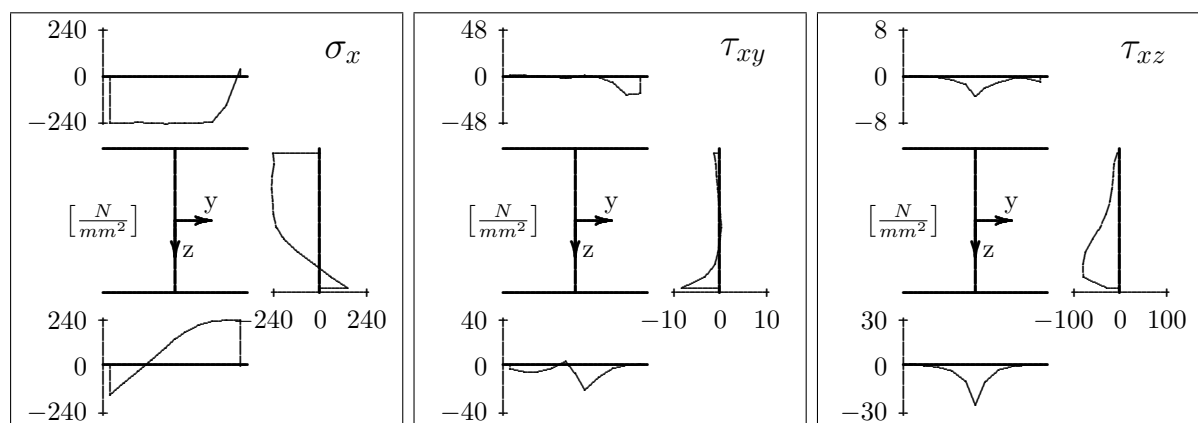
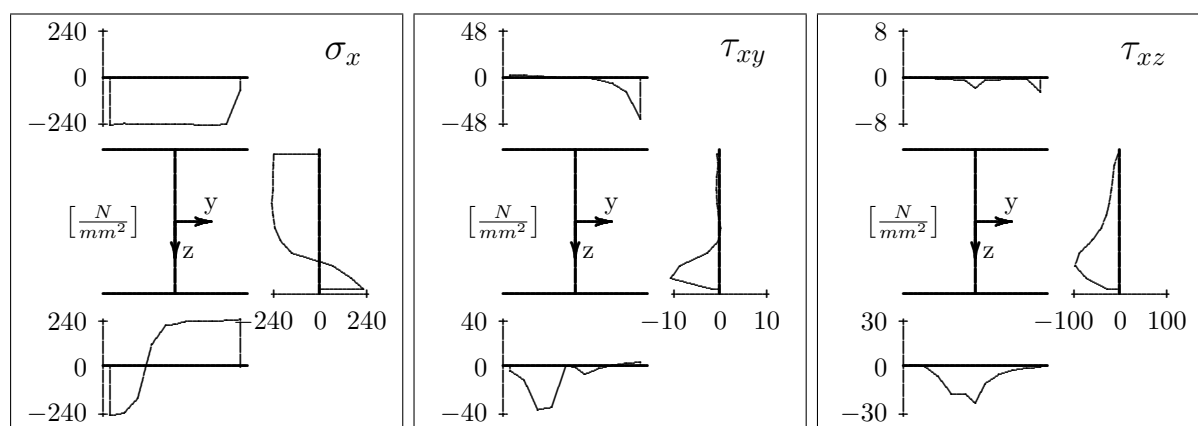


Abbildung 63: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.4

Abbildung 64: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.6Abbildung 65: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.7Abbildung 66: Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$; LF1.83

B Spannungsumlagerung

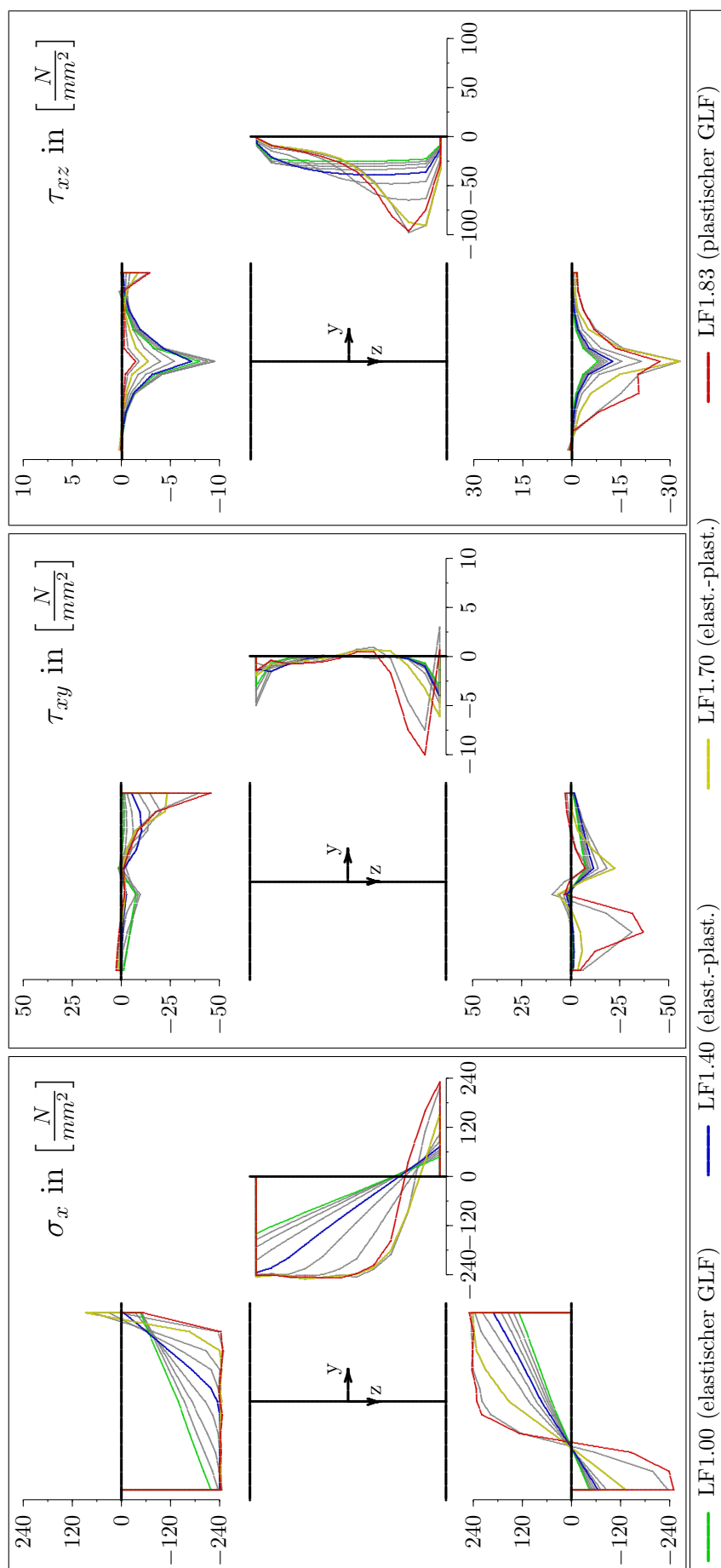
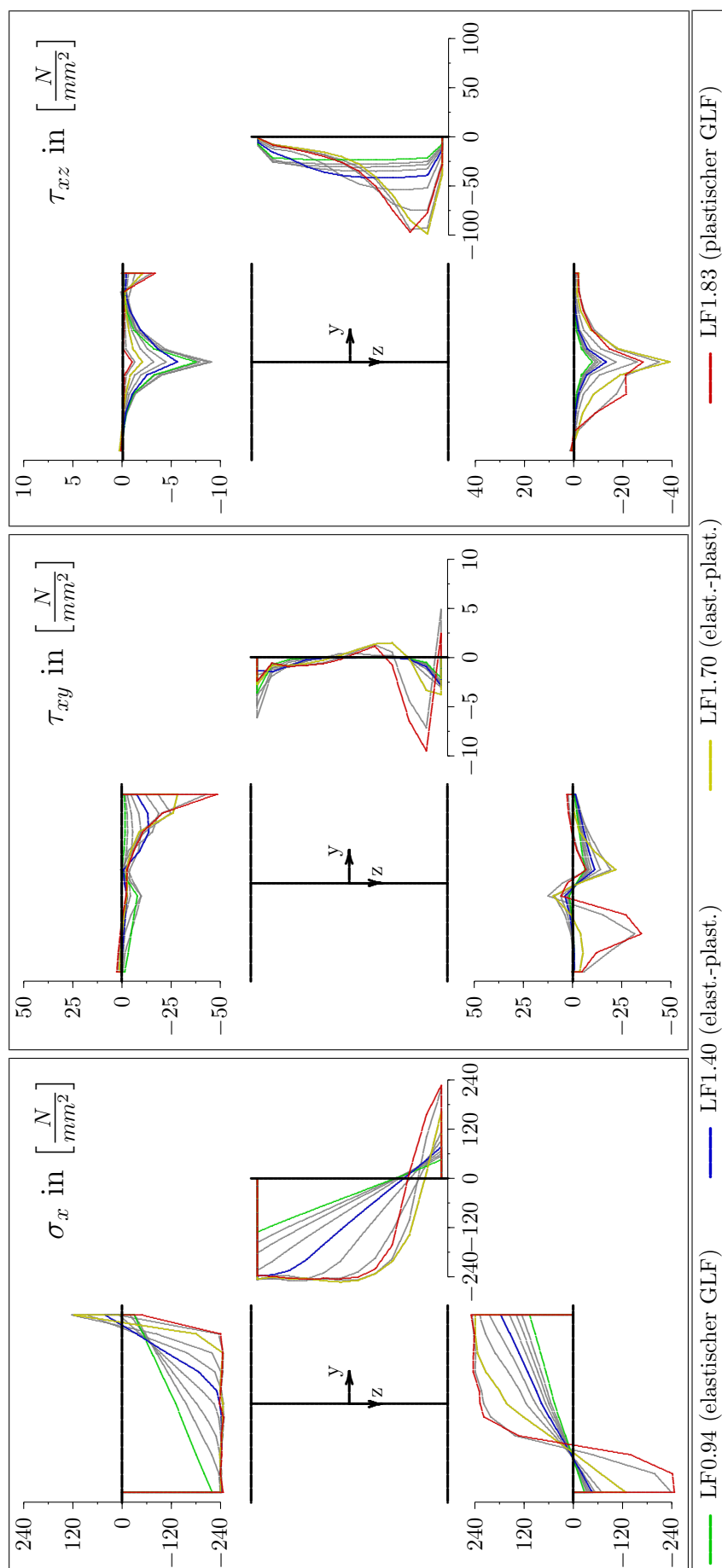
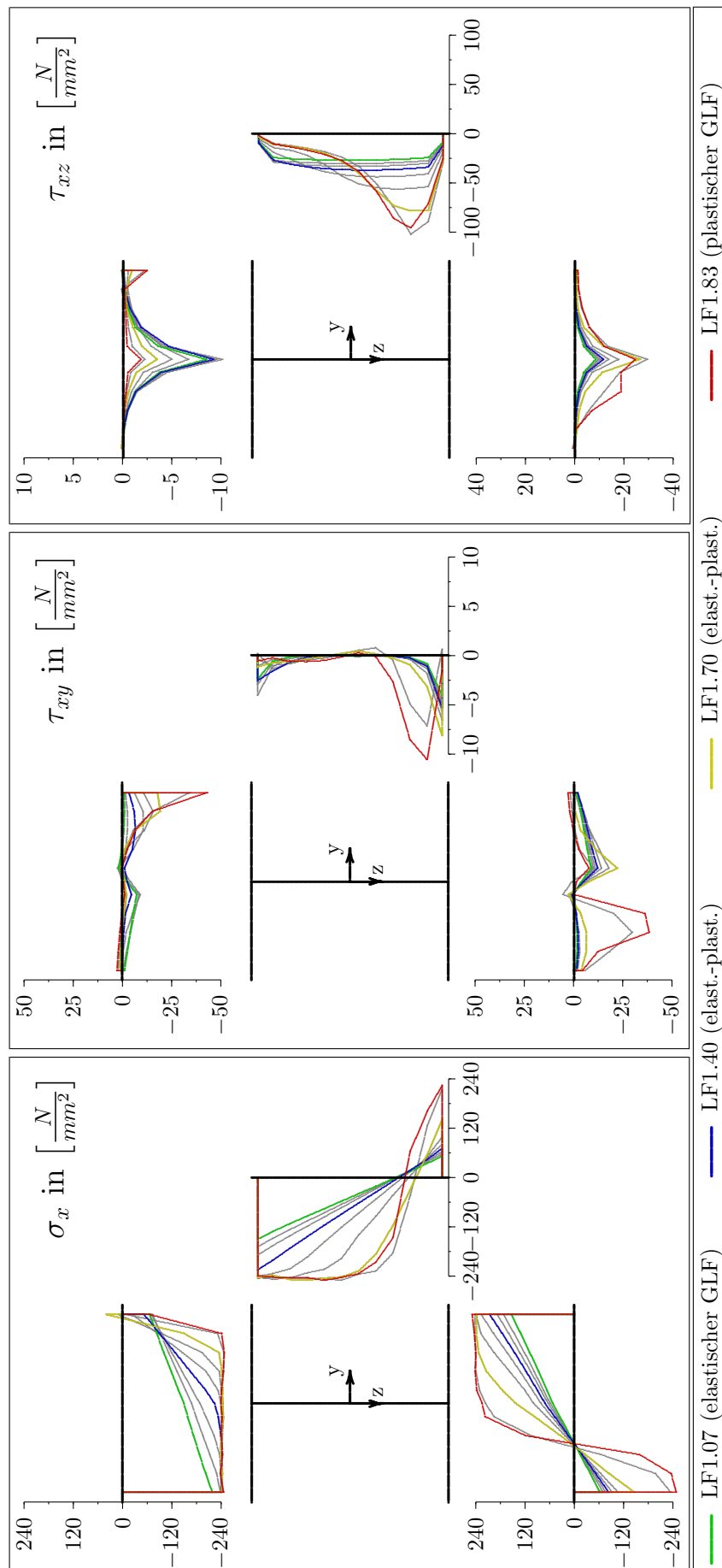


Abbildung 67: Spannungsumlagerungen zufolge $N_x - M_y - M_z$

Abbildung 68: Spannungsumlagerungen zufolge $N_x - M_y - M_z$

Abbildung 69: Spannungsumlagerungen zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$

C CD-ROM

Die beigelegte CD-Rom enthält einige wichtige Dateien, die es dem Leser erleichtern, eigene Forschungen durchzuführen oder vorhandene eigene Ergebnisse zu vergleichen. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Dateien zu den speziellen Lastfällen mit einem 4-stelligen Binärcode versehen. Dabei beschreibt die 1. Stelle das Nichtvorhandensein (0) oder das Vorhandensein (1) der Normalkraft N_x , die 2. Stelle analog das Torsionsmoment M_x , die 3. Stelle das Biegemoment M_y und die 4. Stelle das Biegemoment M_z . So beschreibt zum Beispiel des Code 0100 eine Beanspruchung zufolge Torsionsmoment M_x , oder 1-111 eine Beanspruchung zufolge $N_x - (-M_x) - M_y - M_z$.

Es sind alle Zahlenwerte der dargestellten Diagramme, sowie die Verschiebungen der Knoten der gesamten Struktur in Textdateien zu finden. Im jeweilige Ordner sind die entsprechenden Zuordnungen mit einer readme.txt-Datei erläutert. Die Verschiebungen können mit Hilfe der Strukturdatei (swerner8.s) in das FE-Programmsystem SIANG importiert werden. Entsprechende Beispieldateien sind vorhanden.

Um die zeitliche Entwicklung besser untersuchen zu können, sind Animationen der Spannungsentwicklung und Deformation des Trägers im Verlauf der Laststeigerung zu finden.

D Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Maik Brehm

Weimar, den 17.02.2003